

THESE

présentée

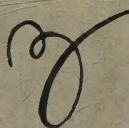
à la Faculté des Sciences de l'Université de Nantes

pour obtenir

le GRADE de DOCTEUR-INGENIEUR

par

Pierre JOUVE



CONTRIBUTION A LA DETERMINATION PAR CONTACT DES CONTRAINTES
SUPERFICIELLES D'UNE PIECE
AMELIORATION DE LA METHODE DE DURETE HERTZIENNE

Soutenue le 27 juin 1970 devant la Commission d'Examen

M. TARDY

Président

M. GUEVEL

M. ARIBERT

M. CHOMARAT

} Examinateurs

THESE

présentée

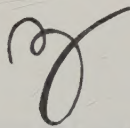
à la Faculté des Sciences de l'Université de Nantes

pour obtenir

le **GRADE de DOCTEUR-INGENIEUR**

par

Pierre JOUVE



**CONTRIBUTION A LA DETERMINATION PAR CONTACT DES CONTRAINTES
SUPERFICIELLES D'UNE PIECE**

AMELIORATION DE LA METHODE DE DURETE HERTZIENNE

Soutenue le 27 juin 1970 devant la Commission d'Examen

M. TARDY

Président

M. GUEVEL

M. ARIBERT

M. CHOMARAT

} Examinateurs

THÈSE

Présentée

à la Faculté des Sciences de la Sorbonne

par

M. GASTON DOCTEUR EN SCIENCES

Pierre JOUVE

1912

CONTRIBUTION A LA DÉTERMINATION PAR CONTACT DES CONTRAINTES
SUPERFICIELLES DUNE PÊCHE
APPLICATION DE LA MÉTHODE DE COURTE HERTZIANE



Reçu le 12 mai 1912 par la Bibliothèque de la Faculté des Sciences

1912

M. GASTON

THÈSE

A. GASTON

Maîtres de Conférences

M. FORESTIER

Sciences de la Terre

M. SAUDRAY

Biologie animale

M. MARTIN

Chimie

M. LE DOUARIN Georges

Biologie végétale

M. AMOURIQ

Psychophysiologie

Melle ASTIE (C.S.U.)

Botanique

M. LAMEAU (E.N.S.M.)

Mathématiques

Mme LE DOUARIN Nicole

Biologie végétale

M. TOURNOUX

Chimie minérale

M. GUEVEL (E.N.S.M.)

Mathématiques

M. GOUIN (C.S.U.)

Chimie

M. POINTEAU (E.N.S.M.)

Chimie

M. SULMONT (E.N.S.M.)

Mathématiques

M. BARDON

Physique

M. LONCKE

Physique

M. LEBRUN

Biologie animale

Mme NICOLAS

Biologie végétale

M. IBISCH Maître de Conférences associé

M. FOUQUES

Mathématiques

M. ROSIER

Physique

M. LEBORGNE

Mathématiques

Melle LEYCURAS

Physique

M. REMY (C.S.U.)

Chimie

M. LE BIHAN

Physique

M. MATZ (C.S.U.)

Biologie

M. CHABANEL

Chimie

M. NICOLAS

Sciences de la Terre

Secrétaire de la Faculté

M. PAILLET

Attaché Principal

UNIVERSITE DE NANTES

FACULTE DES SCIENCES

Doyen	M. DUNOYER de SEGONZAC	Chimie
Assesseur	M. SELLIER	Zoologie
Professeurs	M. PAUC	Mathématiques
	M. RAVILLY (E.N.S.M.)	Mécanique
	M. RAFFIN	Mécanique rationnelle
	M. GARRIGUES	Biologie végétale
	M. BRILLOUET	Analyse numérique
	M. GRAFF	Chimie
	M. VIVIER (E.N.S.M.)	Mathématiques appliquées
	M. COLLET	Physique
	M. BOULLLOUD (C.S.U.)	Physique
	Melle DEBRAUX	Botanique
	M. PETRESCO	Mathématiques
	M. PIERI	Biologie animale
	M. WOJTKOWIAK	Chimie
	M. AVIGNON	Physique
	M. MINN	Physique
	M. MOUTON	Physique
	M. TARDY (E.N.S.M.)	Mécanique
	M. MOLINARO	Mathématiques
Professeurs sans chaire	M. GOBIN (E.N.S.M.)	Chimie
	M. CAVET	Sciences de la Terre
	M. OTTMANN	Sciences de la Terre
	M. MEZENCEV (E.N.S.M.)	Physique
	M. DUPONT	Biologie végétale
	M. ROUXEL	Chimie
	M. QUINIOU	Chimie
	Melle OFFRET (E.N.S.M.)	Physique
	M. LASKAR	Physique
	M. GOUREAUX	Physique

Je vous prie de bien vouloir adresser ce diplôme de l'Université de Paris à Monsieur A. B. 1900, directeur de l'École Supérieure d'Économie Industrielle, 12, rue de Valenciennes, à Paris. Je vous prie de bien vouloir lui remettre ce diplôme et de lui en faire part. Je vous prie de bien vouloir lui remettre ce diplôme et de lui en faire part.

Je vous prie de bien vouloir adresser ce diplôme de l'Université de Paris à Monsieur A. B. 1900, directeur de l'École Supérieure d'Économie Industrielle, 12, rue de Valenciennes, à Paris. Je vous prie de bien vouloir lui remettre ce diplôme et de lui en faire part.

Je vous prie de bien vouloir adresser ce diplôme de l'Université de Paris à Monsieur A. B. 1900, directeur de l'École Supérieure d'Économie Industrielle, 12, rue de Valenciennes, à Paris. Je vous prie de bien vouloir lui remettre ce diplôme et de lui en faire part.

Je vous prie de bien vouloir adresser ce diplôme de l'Université de Paris à Monsieur A. B. 1900, directeur de l'École Supérieure d'Économie Industrielle, 12, rue de Valenciennes, à Paris. Je vous prie de bien vouloir lui remettre ce diplôme et de lui en faire part.

A mes parents

A ma femme

Le présent travail a été effectué au laboratoire de Résistance des Matériaux dirigé par Monsieur D. TARDY, directeur de l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique de Nantes. Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur le Professeur TARDY qui inspira ce travail et me permit de le mener à bien.

Je remercie Messieurs GUEVEL et CHOMARAT de l'Université de Nantes ainsi que Monsieur ARIBERT de l'Université de Rennes, qui m'ont fait l'honneur de participer au jury.

J'adresse également mes remerciements à la Régie Nationale des Usines Renault qui a mis à ma disposition sa machine de dureté hertzienne, et qui, par l'intermédiaire de Monsieur MORETTI, me fit bénéficier de son expérience et m'encouragea constamment.

Enfin, j'exprime toute ma gratitude à ceux qui m'ont aidé, en particulier, au personnel de l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique de Nantes pour les réalisations pratiques, ainsi qu'à celui de l'Institut National des Sciences Appliquées de Rennes qui se chargea de la frappe et du tirage.

S O M M A I R E

	Pages
<i>I - <u>INTRODUCTION</u></i>	
1.1. GENERALITES	1
1.2. OBJET DE L'ETUDE	1
1.3. DEFINITION DES SYMBOLES UTILISES	2
 <i>II - <u>RAPPEL SUR LE PROBLEME DE HERTZ</u></i>	
2.1. EQUILIBRE D'UN DEMI-ESPACE LIMITE PAR UN PLAN	3
2.1.1. Equation fondamentale de l'élasticité	
2.1.2. Solution sous la forme de Popkovich-Neuber	
2.1.3. Equations et résolution dans le cas d'un demi-espace limité par un plan	
2.1.4. Calcul du vecteur déplacement	
2.1.5. Calcul du tenseur des contraintes	
2.2. CONTACT ELASTIQUE DE DEUX CORPS SOLIDES ; CAS GENERAL	7
2.2.1. Position du problème	
2.2.2. Rappel sur la théorie des potentiels	
2.2.3. Solution de l'équation intégrale	
2.2.4. Calcul du vecteur déplacement pour les points de S	
2.2.5. Calcul du tenseur des contraintes pour les points de S	
2.2.6. Calcul pratique des contraintes	
2.2.7. Application	
2.3. CONTACT ELASTIQUE DE DEUX SPHERES	21
2.3.1. Calcul de α , p_0 , w (formules de Hertz)	
2.3.2. Calcul des déplacements des points de S	
2.3.3. Calcul du tenseur des contraintes	

III - METHODE DE DURETE HERTZIENNE

3.1. RAPPEL SUR CETTE METHODE	25
3.1.1. Définition et mesure de la dureté hertzienne	
3.1.2. Influence des contraintes superficielles	
3.2. GENERALISATION DE LA METHODE DE DURETE HERTZIENNE	31
3.2.1. Préliminaires	
3.2.2. Les directions principales sont connues	
3.2.3. Les directions principales sont inconnues (étude théorique)	
3.2.4. Applications	
3.2.5. Conclusion	

IV-CONDITIONS EXPERIMENTALES - ETUDE PROPOSEE

4.1. MACHINE DE DURETE HERTZIENNE	59
4.2. EPROUVETTES	59
4.3. MISE EN TENSION DES PLAQUES	61
4.4. ETUDE EXPERIMENTALES PROPOSEE	64

V - ETUDE DE LA PENETRATION D'UNE BILLE DANS UNE PIECE DEPOURVUE DE CONTRAINTES SUPERFICIELLES

5.1. COURBES THEORIQUES ET EXPERIMENTALES	65
5.1.1. Etude de l'enfoncement résiduel	
5.1.2. Etude de l'enfoncement élastique	
5.2. VARIATIONS DE P_H , Ψ et Φ pour différents points	75
5.2.1. Conditions expérimentales et résultats	
5.2.2. Interprétation des résultats	
5.3. VARIATIONS DE P_H , Ψ et Φ en fonction de l'état de surface	79
5.3.1. Conditions expérimentales et résultats	
5.3.2. Interprétation des résultats	
5.4. VARIATIONS DE P_H , Ψ et Φ en fonction de P_0	81
5.4.1. Conditions expérimentales et résultats	
5.4.2. Interprétation des résultats	

5.5.1. Conditions expérimentales et résultats

5.5.2. Interprétation des résultats

5.5.3. Conclusion

VI - ETUDE DE LA PENETRATION D'UNE BILLE DANS UNE PIECE PRECONTRAINT

6.1. CONDITIONS EXPERIMENTALES 93

6.2. ETUDE DE L'ENFONCEMENT RESIDUEL 95

6.2.1. w_r en fonction de P6.2.2. w_r en fonction de σ_{10} et σ_{20}

6.3. ETUDE DE L'ENFONCEMENT ELASTIQUE 97

6.4. ETUDE DE LA VARIATION DE LA DURETE HERTZIENNE
EN FONCTION DE σ_{10} et σ_{20} 996.4.1. Etude de P_H en fonction de σ_{10} et σ_{20} 6.4.2. Etude de p_H en fonction de σ_{10} et σ_{20}

6.4.3. Conclusion

6.5. ETUDE DE LA VARIATION DE Φ EN FONCTION DE σ_{10} ET σ_{20} 107

6.5.1. Résultats

6.5.2. Relation entre p_H et Φ

6.5.3. Conclusion

6.6. ETUDE DE LA VARIATION DE Ψ EN FONCTION DE σ_{10} ET σ_{20} 111

6.6.1. Résultats expérimentaux

6.6.2. Interprétation des résultats

6.6.3. Conclusion

6.7. AMELIORATIONS DE LA METHODE DE DURETE HERTZIENNE 115

VII - UTILISATION D'UN PENETRATEUR ELLIPTIQUE EN DURETE HERTZIENNE

7.1. INTRODUCTION 117

7.2. CONDITIONS EXPERIMENTALES 117

7.3. ETUDE DES ENFONCEMENTS 118

7.3.1. Enfoncement résiduel

7.3.2. Enfoncement élastique

7.4. VARIATIONS DE LA DURETE HERTZIENNE	121
7.5. VARIATIONS DE Φ	123
7.6. VARIATIONS DE Ψ	125
7.7. CONCLUSION SUR LE PENETRATEUR ELLIPTIQUE	125

VIII - CONCLUSION

BIBLIOGRAPHIE

I - INTRODUCTION

1.1 - GENERALITES

La détermination des contraintes superficielles d'une pièce est très importante, notamment lorsqu'il s'agit de contraintes résiduelles dues à des traitements thermiques (trempe, soudure, etc...) ou mécaniques (grenail-
lage,...). Les méthodes qui permettent de déterminer ces contraintes peuvent se classer en deux groupes : celles qui sont destructives et celles qui ne le sont pas.

Les méthodes destructives n'ont d'intérêt que lorsque les états de contraintes résiduelles peuvent être reproduits à volonté sur des pièces identiques. Elles ne peuvent pas, donc, être utilisées pour des pièces uniques ou en nombre restreint.

Parmi les méthodes non destructives, on trouve celles qui utilisent les rayons X, les ultra-sons ou les duretés superficielles dont la dureté hertzienne. Cette méthode dite de dureté hertzienne, est très sensible ; elle permet de déterminer la plus grande algébriquement des contraintes **principales** superficielles (en prenant les contraintes de tension positive).

1.2 - OBJET DE L'ETUDE

Dans l'exposé qui suit, nous nous sommes proposés de compléter la méthode de dureté hertzienne afin de pouvoir déterminer complètement le tenseur des contraintes à la surface des pièces.

D'après la théorie de Mohr-Caquot, l'étude du contact élastique d'une bille avec une pièce isotrope ne permet pas de trouver la plus petite des contraintes superficielles. Nous avons alors poussé plus loin l'indentation et exploré le domaine plastique naissant. La plus grande partie de nos expériences est consacrée à l'étude de ce contact en faisant varier différents paramètres : l'état de surface, le rayon de la bille, et surtout les deux contraintes principales superficielles.

Nous nous sommes posés également le problème de la détermination des directions principales par contact superficiel. Dans ce cas, il est nécessaire que le champ des contraintes, créé par le pénétrateur, ne soit pas isotrope. Nous avons aussi étudié ce qu'il était possible d'attendre théoriquement et expérimentalement, de l'utilisation d'un pénétrateur elliptique en dureté hertzienne.

1.3 - DEFINITION DES SYMBOLES UTILISES

∂_i : opérateur de dérivation partielle par rapport au paramètre x_i ;

$\Delta = \partial_1 \partial_1 + \partial_2 \partial_2 + \partial_3 \partial_3$: Laplacien ;

$\vec{U}$: vecteur déplacement ;

u_i : composante de $\vec{U}$ suivant l'axe x_i ;

S : tenseur des contraintes ;

σ_{ij} : composante de S relative aux axes x_i et x_j ;

E : module d'Young de la pièce

E' : module d'Young de la bille ;

ν : coefficient de Poisson de la pièce ;

ν' : coefficient de Poisson du pénétrateur ;

$\epsilon = \frac{1-\nu^2}{E} + \frac{1-\nu'^2}{E'}$;

P : force de rapprochement des corps, force d'enfoncement du pénétrateur ;

p_0 : pression au centre de la zone de contact ;

a : grand demi-axe de l'ellipse de contact, rayon du cercle de contact ;

b : petit demi-axe de l'ellipse de contact ;

w_e : enfoncement élastique du pénétrateur dans la pièce ;

w_r : enfoncement résiduel du pénétrateur dans la pièce ;

H : indice caractérisant tout ce qui se rapporte à la dureté hertzienne ;

p_H : dureté hertzienne ;

P_H : force d'enfoncement du pénétrateur correspondant à la dureté hertzienne.

II - RAPPEL SUR LE PROBLEME DE HERTZ * [0]

2.1 - EQUILIBRE D'UN DEMI-ESPACE LIMITE PAR UN PLAN

2.1.1. Equation fondamentale de l'élasticité

Lorsqu'un corps parfaitement élastique, homogène et isotrope est soumis à certains efforts, il se déforme. En supposant nuls les effets de la pesanteur, le vecteur déplacement $\vec{U}$ d'un point M quelconque est donné par l'équation :

$$\Delta \vec{U} + \frac{1}{1-2\nu} \text{grad div } \vec{U} = 0 \quad (2.1.1.)$$

Si nous prenons pour référence un système d'axes orthonormés, $(0, x_1, x_2, x_3)$, l'équation précédente s'écrit en appliquant la convention de l'indice muet :

$$\partial_j \partial_j u_i + \frac{1}{1-2\nu} \partial_i \partial_j u_j = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.1.2.)$$

En utilisant la loi de Hooke, le tenseur des contraintes S au point M s'exprime alors :

$$S = \frac{E}{1+\nu} \text{Déf}(\vec{U}) + \frac{3 E \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} J_1 [\text{Déf}(\vec{U})] I \quad (2.1.3.)$$

avec : - $\text{Déf}(\vec{U})$ le tenseur déformation de terme général $\frac{1}{2}[\partial_i u_j + \partial_j u_i]$;
 - J_1 le 1er invariant d'un tenseur : $J_1 [\text{Déf}(\vec{U})] = \frac{1}{3} \partial_i u_i$;
 - I le tenseur de Kronecker.

* Dans ce chapitre, afin de faire une rédaction concise, nous nous sommes inspirés de méthodes différentes utilisées dans les livres de A.I. LUR'E [1] et de LANDAU et LIFCHITZ [2].

2.1.2. Solution sous la forme de Popkovich - Neuber [1]

Il s'agit de chercher les solutions de (2.1.1) qui se mettent sous la forme :

$$\vec{U} = \vec{B} + \overrightarrow{\text{grad } \phi} \quad (2.1.4.)$$

$\vec{B}$ étant un vecteur harmonique ($\Delta B_i = 0$, $i = 1, 2, 3$).

On vérifie facilement que toutes ces solutions s'écrivent :

$$\vec{U} = \vec{B} - \frac{1}{4(1-\nu)} \text{grad } (\vec{OM} \cdot \vec{B} + B_0) \quad (2.1.5.)$$

B_0 étant une fonction harmonique.

En reportant (2.1.5.) dans (2.1.3.) et en appelant x_i les composantes de $\vec{OM}$ dans la base orthonormée choisie, on trouve après calcul :

$$S = \frac{E}{4(1-\nu^2)} \left[2(1-2\nu) \text{Déf } \vec{B} - (x_i \nabla \cdot \nabla B_i + \nabla \cdot \nabla B_0) + 2\nu \text{div } \vec{B} \cdot I \right] \quad (2.1.6.)$$

$\nabla \cdot \nabla B_i$ étant le tenseur symétrique de terme général : $\partial_j \partial_k B_i$.

2.1.3. Equations et résolution dans le cas d'un demi espace limité par un plan.

Soit un demi espace élastique limité par le plan $O x_1 x_2$ d'un trièdre orthonormé (O, x_1, x_2, x_3) , $O x_3$ étant dirigé vers l'intérieur. Le demi espace est chargé sur le plan $O x_1 x_2$ avec une densité superficielle $p(x_1, x_2)$ positive, dirigée parallèlement à $O x_3$.

Les conditions aux limites sont :

$$\left. \begin{aligned} \{\sigma_{i3}\} &= 0 \quad \text{pour } i = 1, 2 \\ x_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1.7.)$$

$$\left. \begin{aligned} \{\sigma_{33}\} &= -p(x_1, x_2) \\ x_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1.8.)$$

D'après (2.1.6.), on obtient alors les équations suivantes :

$$\left\{ [(1-2\nu) \partial_3 B_i + \partial_i \{(1-2\nu) B_3 - x_1 \partial_3 B_1 - x_2 \partial_3 B_2 - \partial_3 B_0\}] \right\}_{x_3=0} = 0 \quad \text{pour } i=1, 2. \quad (2.1.9.)$$

$$\left\{ \partial_3 B_3 + 2\nu (\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2) + \partial_3 [(1-2\nu) B_3 - x_1 \partial_3 B_1 - x_2 \partial_3 B_2 - \partial_3 B_0] \right\}_{x_3=0} = - \frac{4(1-\nu^2)}{E} p(x_1, x_2) \quad (2.1.10.)$$

Pour résoudre le problème, il suffit donc de trouver quatre fonctions harmoniques vérifiant les trois équations précédentes. Imposons-nous une quatrième équation :

$$(1-2\nu) B_3 - x_1 \partial_3 B_1 - x_2 \partial_3 B_2 - \partial_3 B_0 = 0 \quad (2.1.11.)$$

Les équations (2.1.9-10) deviennent alors :

$$\left\{ \partial_3 B_i \right\}_{x_3=0} = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2 \quad (2.1.12.)$$

$$\left\{ \partial_3 B_3 + 2\nu (\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2) \right\}_{x_3=0} = - \frac{4(1-\nu^2)}{E} p(x_1, x_2) \quad (2.1.13.)$$

Or, il est bien connu en théorie des potentiels, qu'une fonction harmonique $f(x_1, x_2, x_3)$ s'annulant à l'infini et possédant une dérivée normale donnée $\partial_3 f$ dans le plan $x_3 = 0$, est déterminée par :

$$f(x_1, x_2, x_3) = - \frac{1}{2\pi} \iint_{x'_3=0} \partial_3 f(x'_1, x'_2, 0) \frac{d x'_1 d x'_2}{r} \quad (2.1.14.)$$

avec $r = [(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + x_3^2]^{\frac{1}{2}}$

Appliquons ce résultat ici : d'après (2.1.12.), on a :

$$\underline{B_1(x_1, x_2, x_3) = B_2(x_1, x_2, x_3) = 0} \quad (2.1.15.)$$

(2.1.13.) donne alors :

$$\underline{B_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \iint_{x'_3=0} \frac{p(x'_1, x'_2) dx'_1 dx'_2}{[(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + x_3^2]^{\frac{1}{2}}}} \quad (2.1.16.)$$

et d'après (2.1.11.)

$$\underline{B_0 = \frac{2(1-\nu^2)(1-2\nu)}{\pi E} \iint_{x'_3=0} p(x'_1, x'_2) \text{Log}\{x_3 + [(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + x_3^2]^{\frac{1}{2}}\} dx'_1 dx'_2}$$

Nous avons trouvé une solution au problème. Cette solution implique que $\vec{U}$ s'annule à l'infini, ce qui correspond bien au problème concret. Remarquons d'autre part que B_0 est définie à une constante près, ce qui n'a aucune importance, puisque cette fonction n'intervient dans $\vec{U}$ et S que sous forme dérivée.

2.1.4. Calcul du vecteur déplacement

Posons :

$$\omega(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\pi} \iint_{x_3'=0} \frac{p(x_1', x_2') dx_1' dx_2'}{[(x_1-x_1')^2 + (x_2-x_2')^2 + x_3^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.1.18.)$$

et $\omega'(x_1, x_2, x_3)$ tel que :

$$\omega = \partial_3 \omega' \quad (2.1.19.)$$

$\vec{e}_3$ étant le vecteur unité porté par l'axe $O x_3$, on a :

$$\vec{B} = \frac{4(1-\nu^2)}{E} \omega \vec{e}_3 \quad (2.1.20.)$$

$$B_0 = \frac{4(1-\nu^2)(1-2\nu)}{E} \omega' \quad (2.1.21.)$$

Les composantes du vecteur déplacement sont donc en utilisant (2.1.5 - 20 - 21) :

$$u_1 = -\frac{1+\nu}{E} [x_3 \partial_1 \omega + (1-2\nu) \partial_1 \omega'] \quad (2.1.22.)$$

$$u_2 = -\frac{1+\nu}{E} [x_3 \partial_2 \omega + (1-2\nu) \partial_2 \omega'] \quad (2.1.23.)$$

$$u_3 = -\frac{1+\nu}{E} [x_3 \partial_3 \omega - 2(1-\nu) \omega] \quad (2.1.24.)$$

2.1.5. Calcul du tenseur des contraintes

Des expressions (2.1.6 - 20 - 21), on tire :

$$\sigma_{11} = 2\nu \partial_3 \omega - x_3 \partial_1 \partial_1 \omega - (1-2\nu) \partial_1 \partial_1 \omega' \quad (2.1.25.)$$

$$\sigma_{22} = 2\nu \partial_3 \omega - x_3 \partial_2 \partial_2 \omega - (1-2\nu) \partial_2 \partial_2 \omega' \quad (2.1.26.)$$

$$\sigma_{33} = \partial_3 \omega - x_3 \partial_3 \partial_3 \omega \quad (2.1.27.)$$

$$\sigma_{12} = -x_3 \partial_1 \partial_2 \omega - (1-2\nu) \partial_1 \partial_2 \omega' \quad (2.1.28.)$$

$$\sigma_{23} = -x_3 \partial_2 \partial_3 \omega \quad (2.1.29.)$$

$$\sigma_{31} = -x_3 \partial_3 \partial_1 \omega \quad (2.1.30.)$$

2.2 - CONTACT ELASTIQUE DE DEUX CORPS SOLIDES ; CAS GENERAL

2.2.1. Position du problème

On considère deux corps S et S' en contact en un point non singulier de leur surface. On les presse l'un contre l'autre de telle sorte que les déplacements des points des deux corps soient, en première approximation, parallèles à leur normale commune (voir fig. 1).

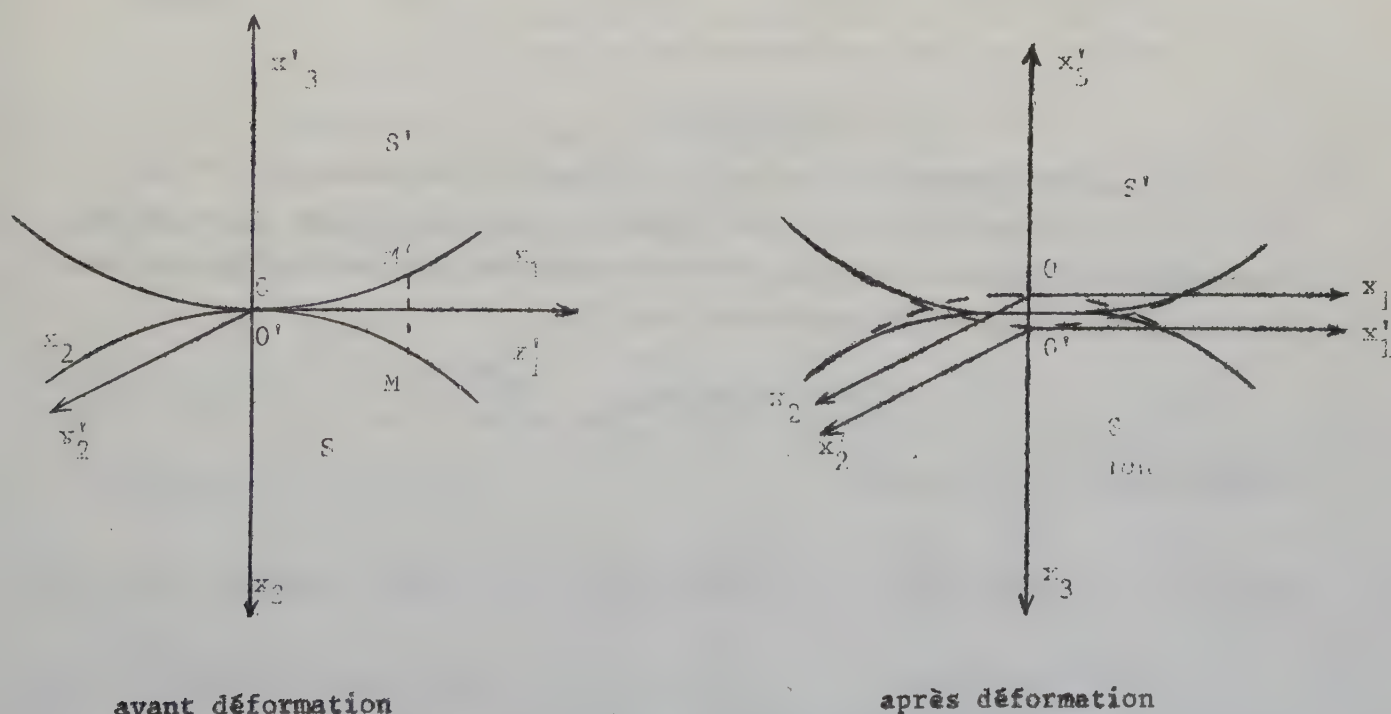


fig. 1

$O x_3$ et $O' x'_3$ sont les normales intérieures aux corps S et S'.

2.2.1.1. - avant déformation

$O x_1$ et $O' x'_1$ sont confondus ainsi que $O x_2$ et $O' x'_2$.

Au voisinage de O et de O' , les équations des surfaces limitant S et S' sont :

$$x_3 = \alpha x_1^2 + 2 \beta x_1 x_2 + \gamma x_2^2 \quad (2.2.1.)$$

$$x'_3 = \alpha' x_1'^2 + 2 \beta' x'_1 x'_2 + \gamma' x_2'^2 \quad (2.2.2.)$$

Si M est un point de la surface de S et M' un point de celle de S' , tels que $\overrightarrow{MM'}$ soit parallèle à $O x_3$, on a alors :

$$x_1 = x'_1, \quad x_2 = x'_2 \quad \text{et}$$

$$x_3 + x'_3 = (\alpha + \alpha') x_1^2 + 2(\beta + \beta') x_1 x_2 + (\gamma + \gamma') x_2^2 \quad (2.2.3.)$$

x_3 et x'_3 représente la distance séparant les points M et M' . On doit avoir $x_3 + x'_3 \geq 0$.

$x_3 + x'_3$ est donc une forme quadratique définie positive en x_1 et x_2 . On peut donc choisir les axes $O x_1$ et $O x_2$ de telle sorte que $\beta + \beta' = 0$ et $\alpha + \alpha' \leq \gamma + \gamma'$.

Dans de tels axes, on aura alors par définition :

$$x_3 + x'_3 = \frac{1}{2R_1} x_1^2 + \frac{1}{2R_2} x_2^2 \quad \text{avec} \quad 0 < R_2 \leq R_1 \quad (2.2.4.)$$

2.2.1.2. Après déformation

Par rapport à $(O x_1 x_2 x_3)$, le vecteur déplacement de M est $(0, 0, u_3)$. De même celui de M' par rapport à $(O' x'_1 x'_2 x'_3)$ est $(0, 0, u'_3)$. Appelons w la distance qui sépare O et O' après déformation. La distance entre les points M et M' est maintenant égale à :

$$u'_3 + x'_3 = w + u_3 + x_3$$

D'après (2.2.4.), on a donc :

$$\left. \begin{aligned} u_3 + u'_3 &= w - \left(\frac{x_1^2}{2R_1} + \frac{x_2^2}{2R_2} \right) & \text{si } (x_1, x_2) \in \Omega \\ u_3 + u'_3 &> w - \left(\frac{x_1^2}{2R_1} + \frac{x_2^2}{2R_2} \right) & \text{si } (x_1, x_2) \notin \Omega \end{aligned} \right\} \quad (2.2.5.)$$

Ω étant la surface de contact.

2.2.1.3. Soit $p(x_1, x_2)$ la pression de contact entre les deux corps

Faisons l'hypothèse suivante :

- les dimensions de la zone de contact Ω sont très petites vis à vis des rayons de courbure des deux corps.

On pourra alors avec une précision suffisante considérer les deux surfaces comme planes au voisinage de Ω .

D'après (2.1.24.) et (2.1.18.) on aura pour $\underline{x_3 = x'_3 = 0}$

$$u_3 + u'_3 = \left(\frac{1-\nu^2}{\pi E} + \frac{1-\nu'^2}{\pi E'} \right) \iint_{\Omega} \frac{p(x'_1, x'_2) dx'_1 dx'_2}{[(x_1-x'_1)^2 + (x_2-x'_2)^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.2.6.)$$

posons

$$\varepsilon = \frac{1-\nu^2}{E} + \frac{1-\nu'^2}{E'} \quad (2.2.7.)$$

Pour trouver une première approche au contact de deux corps, il faut résoudre l'équation intégrale suivante dans laquelle $p(x'_1, x'_2)$ et Ω sont les inconnues :

$$\iint_{\Omega} \frac{p(x'_1, x'_2) dx'_1 dx'_2}{[(x_1-x'_1)^2 + (x_2-x'_2)^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{\varepsilon} \left[w - \frac{x_1^2}{2R_1} - \frac{x_2^2}{2R_2} \right] \quad (2.2.8.)$$

pour tout $(x_1, x_2) \in \Omega$

2.2.2. Rappel sur la théorie des potentiels [3]

Il est facile de montrer à partir du potentiel du champ d'un ellipsoïde que nous avons la relation :

$$\iint_{\Gamma} \frac{\left[1 - \frac{x_1'^2}{a^2} - \frac{x_2'^2}{b^2} \right]^{\frac{1}{2}} dx'_1 dx'_2}{[(x_1-x'_1)^2 + (x_2-x'_2)^2 + x_3^2]^{\frac{1}{2}}} = \pi ab \int_u^{+\infty} \frac{\left[1 - \frac{x_1^2}{a^2+t^2} - \frac{x_2^2}{b^2+t^2} - \frac{x_3^2}{t^2} \right] \frac{dt}{[(a^2+t^2)(b^2+t^2)]^{\frac{1}{2}}}}{dt} \quad (2.2.9.)$$

où Γ est l'ellipse d'équation : $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1 = 0, \quad x_3 = 0$

et u tel que

si $(x_1, x_2, x_3) \in \Gamma$	$u = 0$
si $(x_1, x_2, x_3) \notin \Gamma$	u est la solution positive de

$$\frac{x_1^2}{a^2 + u^2} + \frac{x_2^2}{b^2 + u^2} + \frac{x_3^2}{u^2} = 1$$

Dans le cas où $(x_1, x_2, x_3) \in \Gamma$, on a alors :

$$\iint_{\Gamma} \frac{\left[1 - \frac{x_1'^2}{a^2} - \frac{x_2'^2}{b^2}\right]^{\frac{1}{2}} dx_1' dx_2'}{\left[(x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \pi a b \int_0^{+\infty} \left[1 - \frac{x_1^2}{a^2+t^2} - \frac{x_2^2}{b^2+t^2}\right] \frac{dt}{\left[(a^2+t^2)(b^2+t^2)\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.2.10.)$$

2.2.3. Solution de l'équation intégrale :

En comparant (2.2.8.) et (2.2.10.), on trouve une solution de l'équation intégrale, Nous admettrons qu'elle est unique.

$$- \Omega \text{ est donc l'ellipse d'équation } \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \quad (2.2.11.)$$

$$- p(x_1', x_2') = p_0 \left[1 - \frac{x_1'^2}{a^2} - \frac{x_2'^2}{b^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.2.12.)$$

p_0 étant une constante représentant la pression en 0.

Si P est la force totale de rapprochement des deux corps, on doit avoir :

$$P = \iint_{\Omega} p_0 \left[1 - \frac{x_1'^2}{a^2} - \frac{x_2'^2}{b^2} \right]^{\frac{1}{2}} dx_1' dx_2'$$

$$\text{d'où } P = \frac{2}{3} \pi a b p_0 \quad \text{et} \quad \boxed{p_0 = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi a b}} \quad (2.2.13.)$$

- Posons $k = \frac{b}{a}$ (2.2.14.)

toujours en comparant (2.2.8.) et (2.2.10.) on trouve :

$$\frac{1}{2R_1} = \frac{\varepsilon k p_0}{a} \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{(t^2+1)} - \frac{3}{2} \frac{1}{(t^2+k^2)} - \frac{1}{2} \right] dt \quad (2.2.15.)$$

$$\frac{1}{2R_2} = \frac{\varepsilon k p_0}{a} \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{(t^2+1)} - \frac{1}{2} \frac{1}{(t^2+k^2)} - \frac{3}{2} \right] dt \quad (2.2.16.)$$

$$w = \varepsilon k p_0 a \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{(t^2+1)} - \frac{1}{2} \frac{1}{(t^2+k^2)} - \frac{1}{2} \right] dt \quad (2.2.17.)$$

- d'après (2.2.4.), $R_1 \geq R_2$. En considérant (2.2.15-16.), on trouve donc :

$$k \leq 1 \quad \text{d'où} \quad a \geq b$$

2.2.4. Calcul du vecteur déplacement pour les points de S :

D'après l'hypothèse du paragraphe 2.2.1.2., on peut assimiler le corps S à un demi-espace limité par un plan dans la zone voisine de Ω .

D'après (2.1.18.) et (2.2.12.) on a :

$$\omega(x_1, x_2, x_3) = \frac{p_0}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{\left[1 - \frac{x_1'^2}{a^2} - \frac{x_2'^2}{b^2} \right] \frac{1}{2} dx'_1 dx'_2}{\left[(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + x_3^2 \right] \frac{1}{2}} \quad (2.2.18.)$$

En considérant (2.2.9.) et (2.2.14), l'expression précédente devient :

$$\omega(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} k p_0 a \int_v^{+\infty} \left[1 - \frac{x_1^2}{a^2(t^2+1)} - \frac{x_2^2}{a^2(t^2+k^2)} - \frac{x_3^2}{a^2 t^2} \right] \frac{1}{2} \frac{1}{(t^2+1)} \frac{1}{(t^2+k^2)} \frac{1}{2} dt$$

v tel que

si $(x_1, x_2, x_3) \in \Omega$	$v = 0$
si $(x_1, x_2, x_3) \notin \Omega$	v solution positive

de $\frac{x_1^2}{a^2(v^2+1)} + \frac{x_2^2}{a^2(v^2+k^2)} + \frac{x_3^2}{a^2 v^2} = 1$

(2.2.19.)

Les dérivées partielles de ω sont alors :

$$\partial_1 \omega = - \frac{k p_0 x_1}{a} \int_v^{+\infty} (t^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} (t^2 + k^2)^{-\frac{1}{2}} dt \quad (2.2.20.)$$

$$\partial_2 \omega = - \frac{k p_0 x_2}{a} \int_v^{+\infty} (t^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} (t^2 + k^2)^{-\frac{3}{2}} dt \quad (2.2.21.)$$

$$\partial_3 \omega = - \frac{k p_0 x_3}{a} \int_v^{+\infty} t^{-2} (t^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} (t^2 + k^2)^{-\frac{1}{2}} dt \quad (2.2.22.)$$

Pour trouver $\partial_1 \omega'$ et $\partial_2 \omega'$, on utilise le fait que $\vec{U}$ tend vers zéro quand x_3 tend vers l'infini. On aura alors d'après (2.1.19.) :

$$\partial_i \omega' = - \int_{x_3}^{+\infty} \partial_i \omega \, dx_3 \quad \text{pour } i = 1, 2. \quad (2.2.23.)$$

Il est facile de voir que l'on trouve alors :

$$\partial_1 \omega' = - \frac{k p_0 x_1}{a} \int_v^{+\infty} [x_3 - a f(t)] (t^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} (t^2 + k^2)^{-\frac{1}{2}} dt \quad (2.2.24.)$$

$$\partial_2 \omega' = - \frac{k p_0 x_2}{a} \int_v^{+\infty} [x_3 - a f(t)] (t^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} (t^2 + k^2)^{-\frac{3}{2}} dt \quad (2.2.25.)$$

$$\text{avec } f(t) = t \left[1 - \frac{x_1^2}{a^2 (t^2 + 1)} - \frac{x_2^2}{a^2 (t^2 + k^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.2.26.)$$

En utilisant (2.1.22-23-24.) et (2.2.19-20-21-22-24-25-26.), on trouve le déplacement d'un point quelconque de S au voisinage de Ω :

$$u_1 = \frac{(1+\nu)k p_0 x_1}{E a} \int_v^{+\infty} \left[2(1-\nu)x_3 - (1-2\nu)a f(t) \right] (t^2+1)^{-\frac{3}{2}} (t^2+k^2)^{-\frac{1}{2}} dt \quad (2.2.27.)$$

$$u_2 = \frac{(1+\nu)k p_0 x_2}{E a} \int_v^{+\infty} \left[2(1-\nu)x_3 - (1-2\nu)a f(t) \right] (t^2+1)^{-\frac{1}{2}} (t^2+k^2)^{-\frac{3}{2}} dt \quad (2.2.28.)$$

$$u_3 = \frac{(1+\nu)k p_0}{E a} \int_v^{+\infty} \left[(1-\nu) \left(a^2 - \frac{x_1^2}{t^2+1} - \frac{x_2^2}{t^2+k^2} \right) + \frac{x_3^2}{t^2} \right] (t^2+1)^{-\frac{1}{2}} (t^2+k^2)^{-\frac{1}{2}} dt \quad (2.2.29.)$$

ν étant défini par (2.2.19.) et $f(t)$ par (2.2.26.)

Les points de l'axe Ox_3 auront pour déplacement :

$$u_1=u_2=0 \text{ et } u_3 = \frac{(1+\nu)k p_0}{E a} \int_{\frac{x_3}{a}}^{+\infty} \left[(1-\nu)a^2 + \frac{\nu x_3^2}{t^2} \right] (t^2+1)^{-\frac{1}{2}} (t^2+k^2)^{-\frac{1}{2}} dt \quad (2.2.30.)$$

2.2.5. Calcul du tenseur des contraintes pour les points de S :

En utilisant les relations (2.1.25 à 30.) et (2.2.19.), il est assez facile de trouver l'expression du tenseur des contraintes en un point quelconque de S. Toutefois, pour éviter des expressions trop longues, nous sommes limités au calcul du tenseur des contraintes pour les points de l'axe Ox_3

Après le calcul des limites des différentes dérivées partielles de ω et ω' lorsque x_1 et x_2 tendent vers 0, on trouve en ayant :

$$\nu = \frac{x_3}{a} \quad (2.2.31.)$$

$$\sigma_{11} = k p_0 \left\{ 2(1-\nu)\nu \int_{\nu}^{+\infty} (t^2+1)^{-\frac{3}{2}} (t^2+k^2)^{-\frac{1}{2}} dt - 2\nu\nu \int_{\nu}^{+\infty} t^{-2} (t^2+1)^{-\frac{1}{2}} (t^2+k^2)^{-\frac{1}{2}} dt \right. \\ \left. - \frac{1-2\nu}{1-k^2} \left[1 - \left(\frac{\nu^2+k^2}{\nu^2+1} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\} \quad (2.2.32.)$$

$$\sigma_{22} = k p_0 \left\{ 2(1-\nu)\nu \int_{\nu}^{+\infty} (t^2+1)^{-\frac{1}{2}} (t^2+k^2)^{-\frac{3}{2}} dt - 2\nu\nu \int_{\nu}^{+\infty} t^{-2} (t^2+1)^{-\frac{1}{2}} (t^2+k^2)^{-\frac{1}{2}} dt \right. \\ \left. - \frac{1-2\nu}{k^2-1} \left[1 - \left(\frac{\nu^2+1}{\nu^2+k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\} \quad (2.2.33.)$$

$$\sigma_{33} = -k p_0 (v^2+1)^{-\frac{1}{2}} (v^2+k^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.2.34.)$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0 \quad (2.2.35.)$$

Au point 0, le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= -p_0 \left[2\nu + (1-2\nu) \frac{k}{1+k} \right] & \sigma_{33} &= -p_0 \\ \sigma_{22} &= -p_0 \left[2\nu + (1-2\nu) \frac{1}{1+k} \right] & \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2.36.)$$

2.2.6. Calcul pratique des contraintes :

Toutes les intégrales que nous avons trouvées dans les paragraphes (2.2.3.) et (2.2.5.) sont elliptiques. Pour les calculer, il faut les exprimer en fonction des intégrales de Legendre.

$$E(\phi, k') = \int_0^{\phi} (1-k'^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi = \int_0^{\sin \phi} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (1-k'^2 x^2)^{\frac{1}{2}} dx \quad (2.2.37.)$$

$$F(\phi, k') = \int_0^{\phi} (1-k'^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi = \int_0^{\sin \phi} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (1-k'^2 x^2)^{-\frac{1}{2}} dx \quad (2.2.38.)$$

Il est habituel de poser pour les intégrales complètes :

$$E(k') = E\left(\frac{\pi}{2}, k'\right) \quad (2.2.39.)$$

$$K(k') = F\left(\frac{\pi}{2}, k'\right) \quad (2.2.40.)$$

En faisant le changement de variable $x = (t^2+1)^{\frac{1}{2}}$, on vérifie facilement les relations suivantes :

$$\int_v^{+\infty} (t^2+1)^{-\frac{1}{2}} (t^2+k^2)^{-\frac{1}{2}} dt = F(\phi, e) \quad (2.2.41.)$$

$$\int_v^{+\infty} (t^2+1)^{-\frac{3}{2}} (t^2+k^2)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{e^2} [F(\phi, e) - E(\phi, e)] \quad (2.2.42.)$$

$$\int_v^{+\infty} (t^2+1)^{-\frac{1}{2}} (t^2+k^2)^{-\frac{3}{2}} dt = -\frac{1}{1-e^2} \frac{f^2-1}{f(f^2-e^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{e^2(1-e^2)} [E(\phi, e) - (1-e^2)F(\phi, e)] \quad (2.2.43.)$$

$$\int_v^{+\infty} t^{-2} (t^2+1)^{-\frac{1}{2}} (t^2+k^2)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{1-e^2} \frac{f^2-e^2}{f(f^2-1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(1-e^2)} \quad (2.2.44.)$$

$$\text{avec } f = (v^2+1)^{\frac{1}{2}} \quad (2.2.45.)$$

$$\phi = \text{Arcsin } \frac{1}{f} \quad (2.2.46.)$$

$$\text{et } e = (1 - k^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.2.47.)$$

e représente l'excentricité de l'ellipse de contact.

En faisant tendre v vers 0 dans (2.2.41-42-43.), les formules (2.2.15-16-17.) deviennent :

$$\frac{1}{2R_1} = \frac{\epsilon p_0 (1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{a e^2} [K(e) - E(e)] \quad (2.2.48.)$$

$$\frac{1}{2R_2} = \frac{\epsilon p_0 (1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{a e^2} \left[\frac{E(e)}{1-e^2} - K(e) \right] \quad (2.2.49.)$$

$$w = \epsilon p_0 a (1-e^2)^{\frac{1}{2}} K(e) \quad (2.2.50.)$$

Connaissant $\frac{R_2}{R_1}$ on peut en déduire e . En effet, (2.2.48.49.)
donnent :

$$\boxed{\frac{R_2}{R_1} = \frac{(1-e^2) [K(e) - E(e)]}{E(e) - (1-e^2) K(e)}} \quad (2.2.51.)$$

(2.2.48.) donne :

$$\boxed{a = A(e) [\epsilon P R_1]^{-\frac{1}{3}} \text{ avec } A(e) = \left\{ \frac{3}{\pi e^2} [K(e) - E(e)] \right\}^{\frac{1}{3}}} \quad (2.2.52.)$$

(2.2.13.) et (2.2.51.) donnent :

$$\boxed{p_0 = B(e) [\epsilon^{-2} P R_1^{-2}]^{-\frac{1}{3}} \text{ avec } B(e) = \frac{3}{2\pi \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{1}{[A(e)]^2}} \quad (2.2.53.)$$

Enfin, (2.2.50.) et (2.2.52.) et (2.2.53.) donnent :

$$\boxed{w = C(e) [\epsilon^2 P^2 R_1^{-1}]^{-\frac{1}{3}} \text{ avec } C(e) = \left[\frac{9}{8\pi^2} \frac{e^2}{K(e) - E(e)} \right]^{\frac{1}{3}} K(e)} \quad (2.2.54.)$$

e^2	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\frac{R_2}{R_1}$	1,000	0,963	0,925	0,885	0,846	0,806	0,765	0,724	0,682	0,637	0,594
A(e)	0,908	0,914	0,921	0,927	0,934	0,941	0,949	0,957	0,966	0,976	0,987
B(e)	0,578	0,585	0,593	0,602	0,611	0,622	0,633	0,646	0,660	0,675	0,693
C(e)	0,825	0,830	0,835	0,841	0,847	0,854	0,861	0,869	0,878	0,887	0,897
e^2	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
$\frac{R_2}{R_1}$	0,594	0,549	0,502	0,454	0,405	0,353	0,297	0,238	0,174	0,101	0,000
A(e)	0,987	0,999	1,012	1,027	1,044	1,063	1,087	1,118	1,160	1,228	
B(e)	0,693	0,713	0,737	0,765	0,799	0,844	0,903	0,984	1,121	1,415	
C(e)	0,897	0,908	0,920	0,934	0,949	0,966	0,988	1,019	1,061	1,131	

tableau 1 *

D'après le tableau précédent, dès que l'on connaît $\frac{R_2}{R_1}$, il est possible de trouver e^2 ainsi que les quantités A (e), B (e), C (e) qui sont nécessaires pour le calcul de a, p. et w.

* Ce tableau a été calculé à partir de la table 7 (page 306) du livre de A.I.LUR'E [1]. Les résultats ont été arrondis au 1/1000 le plus proche.

En remplaçant (2.2.42-43-44.) dans (2.2 32-33-34.) on trouve les contraintes principales pour les points de l'axe 0 x_3 :

$$\sigma_{11} = p_0(1-e^2) \frac{1}{2} \left\{ \frac{2(1-\nu)}{e^2} (f^2-1)^{\frac{1}{2}} (F-E) + \frac{2\nu}{1-e^2} (f^2-1)^{\frac{1}{2}} E - \frac{2\nu}{1-e^2} \cdot \frac{(f^2-e^2)^{\frac{1}{2}}}{f} - \frac{1-2\nu}{e^2} \left[1 - \frac{(f^2-e^2)^{\frac{1}{2}}}{f} \right] \right\} \quad (2.2.55.)$$

$$\sigma_{22} = p_0(1-e^2) \frac{1}{2} \left\{ \frac{2(1-\nu)}{e^2} (f^2-1)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{E}{1-e^2} - F \right) + \frac{2\nu}{1-e^2} (f^2-1)^{\frac{1}{2}} E - \frac{2(1-\nu)}{1-e^2} \cdot \frac{f^2-1}{f(f^2-e^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{2\nu}{1-e^2} \cdot \frac{(f^2-e^2)^{\frac{1}{2}}}{f} + \frac{1-2\nu}{e^2} \left[1 - \frac{f}{(f^2-e^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \right\} \quad (2.2.56.)$$

$$\sigma_{33} = - p_0 \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{f(f^2-e^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.2.57.)$$

en ayant posé pour simplifier l'écriture :

$$E = E(\phi, e) = \int_0^\phi (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi \quad (2.2.58.)$$

$$F = F(\phi, e) = \int_0^\phi (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi \quad (2.2.59.)$$

$$f = \frac{(x_3^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}}{a} \quad (2.2.60.)$$

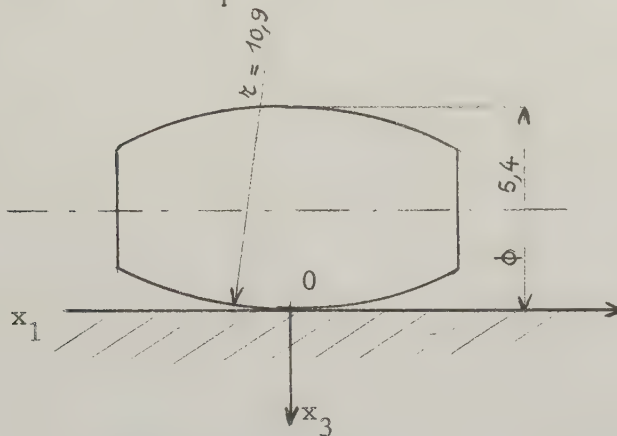
$$\text{et} \quad \phi = \text{Arcsin} \frac{1}{f} = \text{Arctg} \frac{a}{x_3} \quad (2.2.61.)$$

2.2.7. Application :

Nous avons fait certaines expériences sur des pièces planes avec un pénétrateur de révolution : voir figure 2.

Dans ce cas, nous avons $R_1 = 10,9$ mm et $R_2 = 2,7$ mm (2.2.62.)
L'axe $O x_1$ est alors parallèle à l'axe de révolution du pénétrateur.

$$\text{Nous avons } \frac{R_2}{R_1} = 0,2478 \quad (2.2.63.)$$



D'après le tableau 1 nous trouvons :

$$e^2 = 0,842 \quad e = 0,918 \quad (2.2.64.)$$

et les formules (2.2.52-53-54.) deviennent :

$$a = 1,113 (\epsilon P R_1)^{\frac{1}{3}} \quad (2.2.65.)$$

$$p_0 = 0,971 (\epsilon^{-2} P R_1^{-2})^{\frac{1}{3}} \quad (2.2.66.)$$

$$w = 1,014 (\epsilon^2 P R_1)^{\frac{1}{3}} \quad (2.2.67.)$$

En utilisant les relations (2.2.55 à 61.), nous avons calculé les quantités σ_{11} , σ_{22} et σ_{33} pour différentes valeurs de $\frac{x_3}{a}$.

Nous avons pris $\nu = 0,292$ (valeur provenant de nos expériences), et $e = 0,92$ [plus proche valeur de 0,918 se trouvant dans les tables de $E(\phi, e)$ et $F(\phi, e)$].

La figure 3 représente les variations des contraintes principales en fonction de $\frac{x_3}{a}$ que nous avons trouvées.

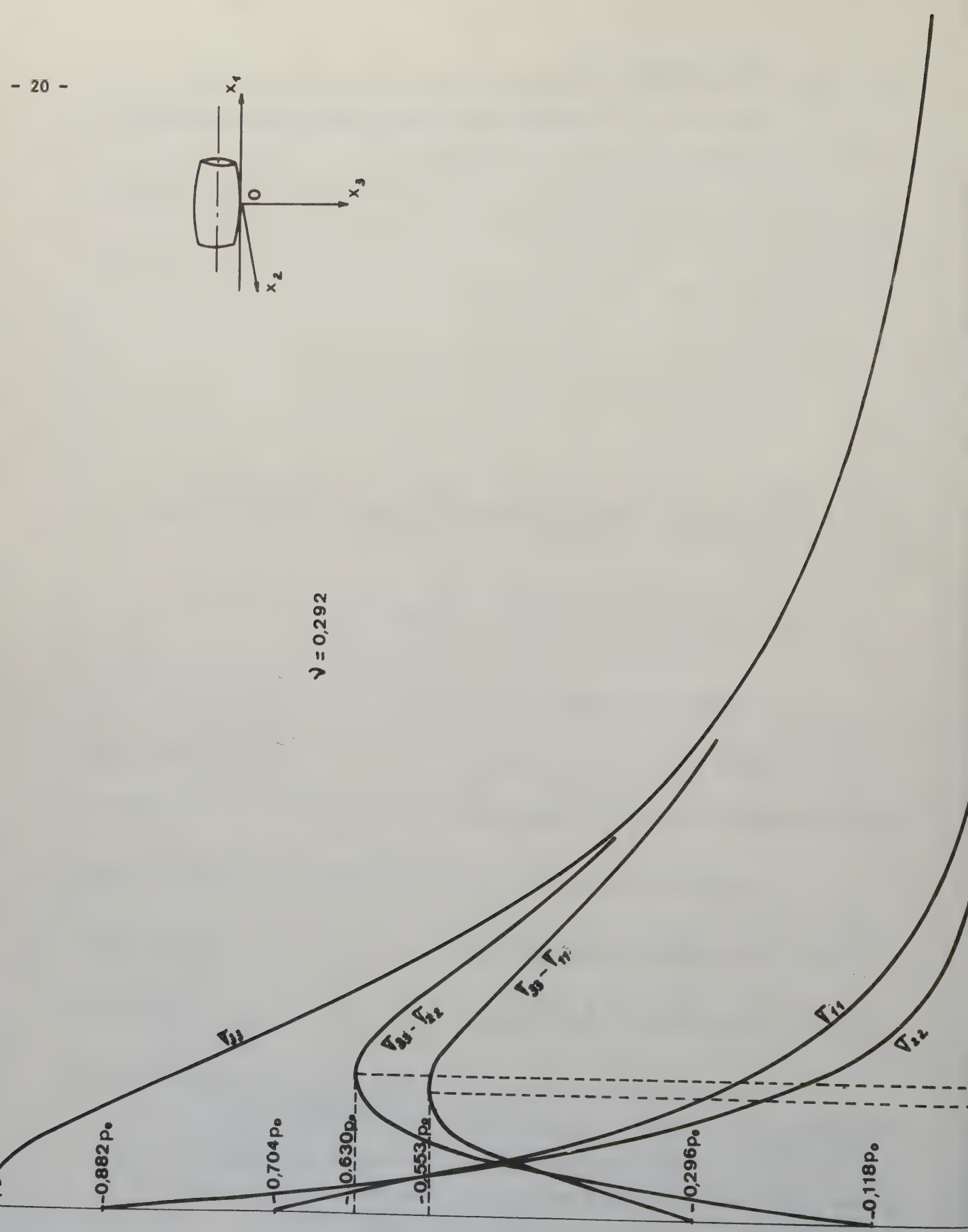


figure 3

2.3. CONTACT ELASTIQUE DE DEUX SPHERES :

2.3.1. Calcul de a , p_0 , w (formules de Hertz) :

Si S est une sphère de rayon R et S' une sphère de rayon R', au voisinage du point de contact, les formules (2.2.1.) et (2.2.2.) deviennent :

$$x_3 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2R} \quad \text{et} \quad x'_3 = \frac{x_1'^2 + x_2'^2}{2R'}$$

$$\text{d'où si } x_1 = x_1' \quad \text{et } x_2 = x_2' :$$

$$x_3 + x'_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) (x_1^2 + x_2^2) \quad (2.3.1.)$$

dans ce cas nous avons donc :

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \quad (2.3.2.)$$

d'où $k = 1$ et $e = 0$ ce qui est évident puisque la zone de contact est un cercle.

(2.2.15.) donne :

$$\frac{1}{2R_1} = \frac{\epsilon p_0}{a} \int_0^{+\infty} (t^2 + 1)^{-2} dt \quad (2.2.3.)$$

et comme $p_0 = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi a^2}$, on en déduit :

$$a = \left[\frac{3}{4} \epsilon P R_1 \right]^{\frac{1}{3}} \quad (2.3.4.)$$

$$\text{puis } p_0 = \frac{1}{\pi} \left[\frac{6}{\epsilon^2} \cdot \frac{P}{R_1^2} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (2.3.5.)$$

$$\text{et } w = \left[\frac{9}{16} \epsilon^2 \frac{P^2}{R_1} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (2.3.6.)$$

(2.3.4-5-6.) s'appellent les formules de Hertz

On vérifie aisément que ces formules concordent bien avec (2.2.52-53-54) et le tableau I. En effet, pour $e = 0$ on a bien :

$$A(0) = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \neq 0,908$$

$$B(0) = \frac{(6)}{\pi}^{\frac{1}{3}} \neq 0,578$$

$$C(0) = \left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{3}} \neq 0,825$$

2.3.2. Calcul des déplacements des points de S :

D'après (2.2.19.) nous avons :

$$\omega = \frac{1}{2} p_0 a \int_v^{+\infty} \left[1 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{a^2(t^2+1)} - \frac{x_3^2}{a^2 t^2} \right] (t^2 + 1)^{-1} dt$$

avec v tel que

si $x_3 = 0$ et $x_1^2 + x_2^2 \leq a$	: $v = 0$
si $x_3 < 0$ ou $x_1^2 + x_2^2 > a$	: v est la solution positive

$$\text{de } \frac{x_1^2 + x_2^2}{a^2(v^2+1)} + \frac{x_3^2}{a^2 v^2} = 1 \quad (2.3.7.)$$

Le problème étant de révolution autour de Ox_3 , sans diminuer la généralité on peut se limiter au cas où $x_2 = 0$. (2.3.8.)

En appliquant les formules (2.2.27. à 29.) après calcul on trouve :

$$u_1 = -\frac{(1+v)p_0}{Ea} \left[(1-v)x_1 x_3 \left(\frac{v}{v^2+1} - \text{Arctg } \frac{1}{v} \right) + \frac{1-2v}{3} \cdot \frac{a^3}{x_1} \left(1 - \frac{x_3^3}{a^3 v^3} \right) \right] \quad (2.3.9.)$$

$$u_2 = 0 \quad (2.3.10.)$$

$$u_3 = \frac{(1+v)p_0}{Ea} \left[\frac{1-v}{2} x_1^2 \left(\frac{v}{v^2+1} - \text{Arctg } \frac{1}{v} \right) + v x_3^2 \left(\frac{1}{v} - \text{Arctg } \frac{1}{v} \right) + (1-v)a^2 \text{Arctg } \frac{1}{v} \right] \quad (2.3.11.)$$

$x_2 = 0$

2.3.3. Calcul du tenseur des contraintes :

En appliquant (2.1.25 à 30.), (2.3.7.) et en faisant $x_2 = 0$, on trouve alors, après intégration :

$$\sigma_{11} = p_0 \left\{ \frac{1-2\nu}{3} \cdot \frac{a^2}{x_1^2} \left[1 - \frac{x_3^3}{a^3 \nu^3} \right] + \frac{x_3^3}{a \nu (a^2 \nu^4 + x_3^2)} + \frac{x_3}{a \nu} \left[\frac{(1-\nu) \nu^2}{\nu^2 + 1} + (1+\nu) \nu \operatorname{Arctg} \frac{1}{\nu} - 2 \right] \right\} \quad (2.3.12.)$$

$$\sigma_{22} = -p_0 \left\{ \frac{1-2\nu}{3} \cdot \frac{a^2}{x_1^2} \left[1 - \frac{x_3^3}{a^3 \nu^3} \right] + \frac{x_3}{a \nu} \left[\frac{(1-\nu) \nu^2}{\nu^2 + 1} - (1+\nu) \nu \operatorname{Arctg} \frac{1}{\nu} + 2 \nu \right] \right\} \quad (2.3.13.)$$

$$\sigma_{33} = -p_0 \cdot \frac{x_3^3}{a \nu (a^2 \nu^4 + x_3^2)} \quad (2.3.14.)$$

$$\sigma_{31} = -p_0 \cdot \frac{x_3^2 x_1 \nu}{a (\nu^2 + 1) (a^2 \nu^4 + x_3^2)} \quad (2.3.15.)$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{23} = 0 \quad (2.3.16.)$$

$$x_2 = 0$$

En faisant tendre x_1 vers 0, on obtient le tenseur des contraintes pour les points de l'axe Ox_3 . Après calcul on trouve :

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = -p_0 \left[(1+\nu) \left(1 - \nu \operatorname{Arctg} \frac{1}{\nu} \right) - \frac{1}{2(\nu^2 + 1)} \right] \quad (2.3.17.)$$

$$\sigma_{33} = -p_0 \cdot \frac{1}{\nu^2 + 1} \quad (2.3.18.)$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0 \quad (2.3.19.)$$

$$x_1 = x_2 = 0$$

En posant $\nu = 0,292$, nous aurons représenté les variations des différentes contraintes principales, pour les points de Ox_3 , sur la figure 4.

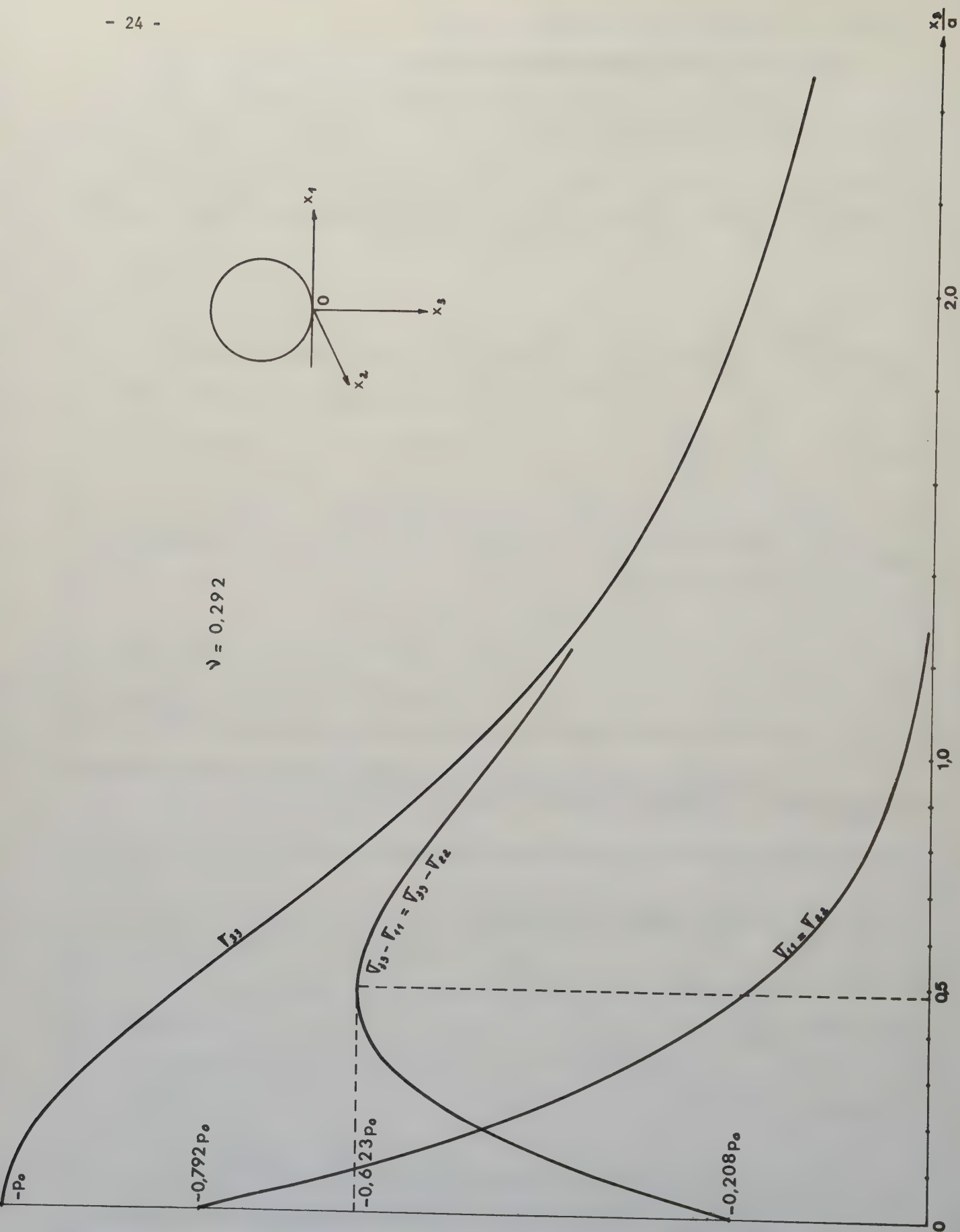


figure 4

III - METHODE DE DURETE HERTZIENNE

3.1 - RAPPEL SUR CETTE METHODE

3.1.1. Définition et mesure de la dureté hertzienne

3.1.1.1. Certains auteurs ont donné la définition suivante : la dureté hertzienne d'une pièce est la limite élastique à la compression exercée par une bille dure. Plus précisément, on peut dire que c'est la valeur p_H de p_0 (pression au centre du cercle de contact) à partir de laquelle le contact passe du domaine élastique au domaine plastique.

On peut donner une interprétation simple de p_H . Prenons par exemple une pièce métallique dont le coefficient de Poisson ν est 0,3. D'après les formules (2.3.26 à 30), on peut montrer que $|\sigma_{33} - \sigma_{11}|$ est maximum pour $x_3 = \frac{a}{2}$ et $x_1 = x_2 = 0$, (a rayon du cercle de contact ; on obtient ainsi le point le plus chargé. Le tenseur des contraintes, en ce point, a pour composantes : $\sigma_{11} = \sigma_{22} = -0,18 p_0$, $\sigma_{33} = -0,80 p_0$, $\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0$.

Il est alors possible de tracer le tricerclé de Mohr qui est réduit à un seul cercle.

Si on fait croître p_0 , on obtient un faisceau de cercles homothétiques. Celui qui sera tangent à la courbe intrinsèque de Mohr-Caquot correspondra à la valeur $p_0 = p_H$. (Voir figure 5).

Toujours en supposant $\nu = 0,3$, on trouve diverses valeurs p_H suivant la forme de la courbe intrinsèque

Pour la plupart des métaux, on obtient les résultats suivants :

- approximation de Tresca (deux droites parallèles), l'équation est

$$|\tau| = \frac{\sigma_e}{2}$$

on trouve $p_H = \frac{\sigma_e}{0,62}$ (3.1.1.)

- approximation de Navier (deux droites inclinées), l'équation est

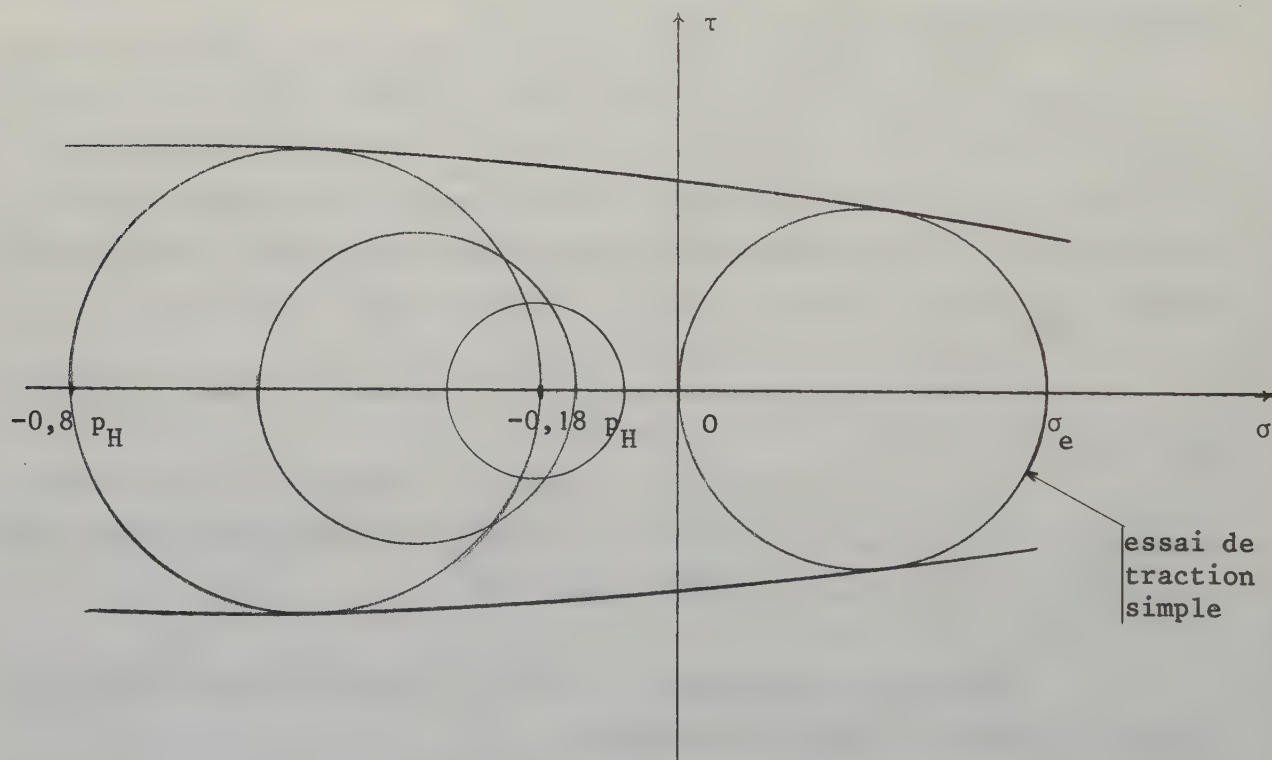
$$|\tau| = a - b\sigma \quad \text{avec} \quad 0 \leq a \quad 0 \leq b < 0,82$$

on trouve : $p_H = \frac{a}{0,31} \cdot \frac{\sqrt{1 + b^2} + 1,58 b}{1 - 1,50 b^2}$ (3.1.1.bis)

- approximation parabolique, dans ce cas l'équation est :

$$\tau^2 = a^2 - b\sigma \quad \text{avec} \quad 0 \leq a \quad 0 \leq b < 2a$$

on trouve : $p_H = \frac{1}{0,31} \left[0,79b + \sqrt{a^2 + 0,37 b^2} \right]$ (3.1.1.ter)



- Figure 5 -

La valeur de la dureté p_H ne dépend théoriquement que des caractéristiques mécaniques de la pièce. Elle est indépendante de la bille.

Pour des raisons de commodité, on confond quelquefois p_H avec la valeur P_H de la force de rapprochement qui elle dépend de la bille.

D'après la formule (2.3.5.), on a alors :

$$P_H = \frac{1}{\pi} \left[\frac{6}{\epsilon^2} \frac{P_H}{R_1^2} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (3.1.2.)$$

3.1.1.2. La détermination de p_H se fait toujours à partir de P_H . La mesure de P_H s'est faite d'abord optiquement avec P.A. BLAIN [4] : observation de l'empreinte après avoir appliqué une charge P sur la bille. Cette méthode donnait des valeurs de la dureté très supérieures à ce qu'elles devaient être, car la limite élastique était atteinte bien avant que l'empreinte ne soit visible.

Puis, J. POMEY, F. GOUTEL et L. ABEL [5] ont déterminé la dureté hertzienne par voie électrique en mesurant la résistance de contact bille-pièce. Cette résistance fait une chute importante à l'apparition des premières déformations permanentes. La mesure d'une telle résistance est délicate et pose de difficiles problèmes.

Enfin, les méthodes utilisées depuis, consistent à mesurer la profondeur de l'empreinte laissée par la bille après avoir appliqué une charge P . On mesure en fait le déplacement résiduel de la bille. Cette méthode a été utilisée par L. HAUSSEGUY et H. MARTINOD [6], d'abord, puis, par C. MORETTI [7]. C'est sur la machine mise au point par ce dernier, à la Régie Nationale des Usines Renault, que nous avons fait nos essais.

3.1.2. Influence des contraintes superficielles

3.1.2.1. P.A. BLAIN [4] a été le premier à montrer expérimentalement que la dureté hertzienne est très sensible aux contraintes superficielles.

Appelons σ_{10} et σ_{20} les contraintes principales superficielles initiales de la pièce ($\sigma_{30}=0$), et σ_{1H} , σ_{2H} , σ_{3H} , les contraintes principales en des points de l'axe Ox_3 , dues aux seuls effets de la bille (nous avons donc $\sigma_{1H} = \sigma_{2H}$).

Les contraintes principales pour ces points sont :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{10} + \sigma_{1H} \\ \sigma_{22} &= \sigma_{20} + \sigma_{2H} \\ \sigma_{33} &= \sigma_{3H} \end{aligned} \right\} \quad (3.1.3.)$$

Nous admettrons sans démonstration que le point le plus chargé pour p_0 donné, se trouve sur l'axe Ox_3 . Nous poserons alors :

$$\sigma_{1H} = -\alpha_1 p_0, \quad \sigma_{2H} = -\alpha_2 p_0, \quad \sigma_{3H} = -\alpha_3 p_0 \quad (3.1.4.)$$

$$\text{avec } 0 < \alpha_1 = \alpha_2 < \alpha_3$$

les coefficients α_i étant des fonctions de $\frac{x_3}{a}$.

Les contraintes superficielles initiales doivent être telles que le tricerclé de Mohr, tracé à partir des valeurs σ_{10} , σ_{20} et 0, soit intérieur à la courbe intrinsèque de Mohr-Caquot. Supposons $\sigma_{10} \geq \sigma_{20}$: (3.1.5.)

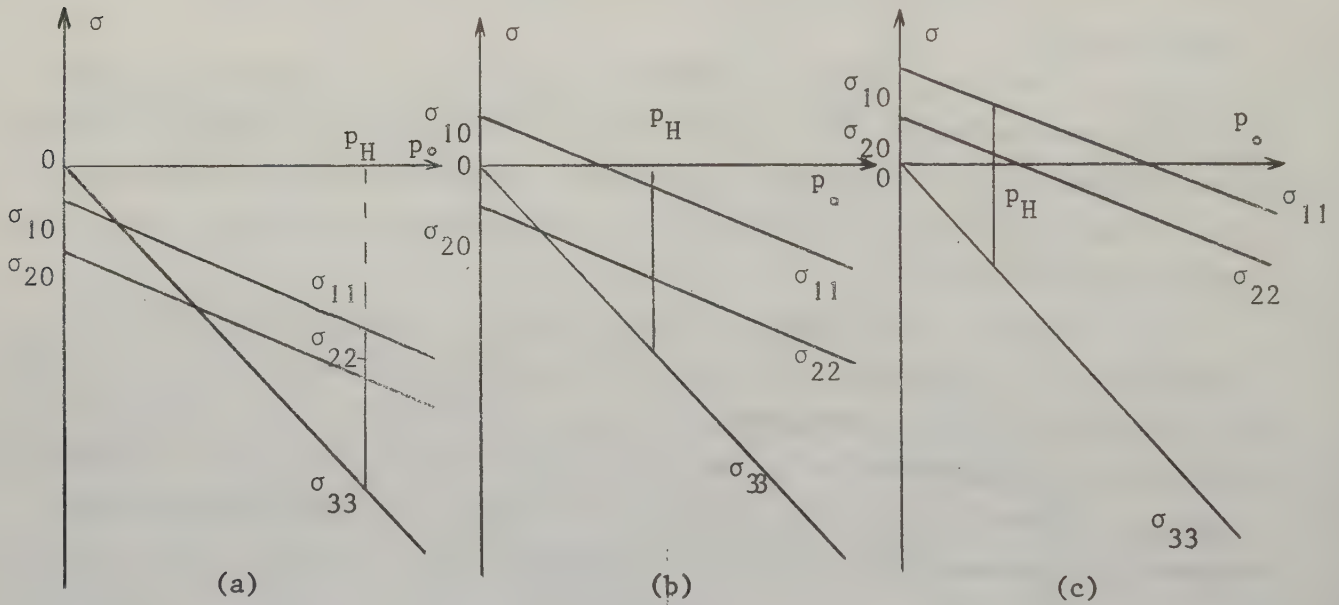


figure 6

Sur la figure 6, nous avons représenté les variations de σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} en fonction de p_0 , pour $\frac{x_3}{a}$ fixé et pour différents états de contraintes initiales. En supposant que la courbe intrinsèque à sa concavité tournée vers les contraintes négatives (c'est le cas pour la plupart des métaux), il ressort clairement de la figure 6 que pour $p_0 = p_H$, le plus grand cercle de Mohr sera toujours construit sur σ_{33} , et sur la plus grande algèbriquement des quantités σ_{10} et σ_{20} . Le diamètre de ce cercle est : $\sigma_{10} + (\alpha_3 - \alpha_1)p_0$; il est maximum quand $\alpha_3 - \alpha_1$ est maximum.

D'après le paragraphe 3.1.1.1. et en accord avec la figure 4, quel que soit l'état de contraintes, le point le plus chargé pour des aciers se trouve donc sur l'axe Ox_3 à une profondeur voisine de $\frac{a}{2}$.

Dans ce cas, on peut alors prendre :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{10} - 0,18 p_H \\ \sigma_{22} &= \sigma_{20} - 0,18 p_H \\ \sigma_{33} &= - 0,80 p_H \end{aligned} \right\} \quad (3.1.6.)$$

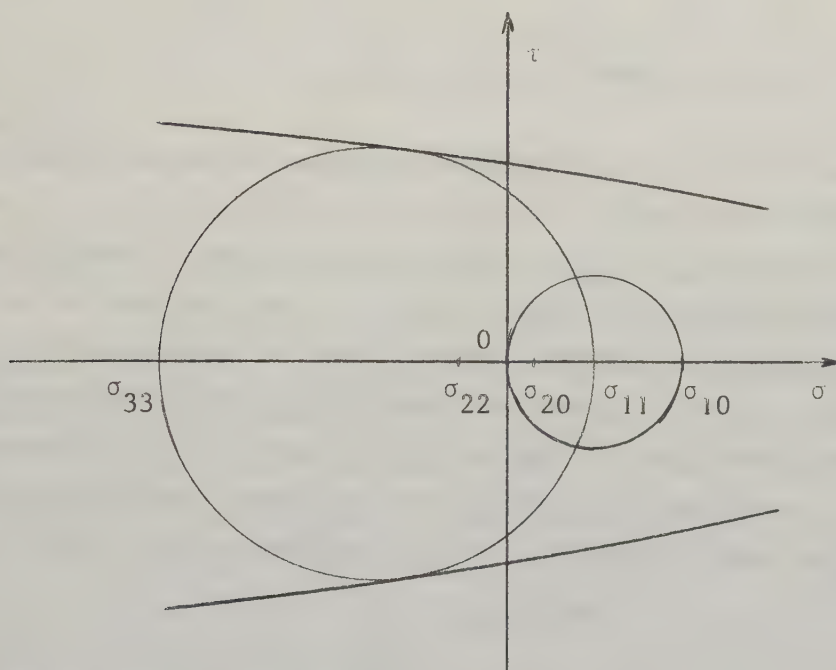


figure 7

Si $\sigma_{10} \geq \sigma_{20}$, la connaissance de p_H donne σ_{33} , par (3.1.6.), puis σ_{11} en traçant le cercle tangent à la courbe intrinsèque, et enfin, σ_{10} par (3.1.6.). Il existe donc une relation biunivoque entre p_H et σ_0 la plus grande des contraintes superficielles.

Pour des aciers, le graphe $\sigma_0 = f(p_H)$ à la forme de celui de la figure 8. Avec une bonne approximation, on peut l'assimiler à une droite.

3.1.2.2. J. POMEY, F. GOUTEL et L. ABEL [5] ont repris les travaux de P.A. BLAIN et ont mis au point une méthode permettant de déterminer les contraintes superficielles résiduelles dans les pièces trempées.

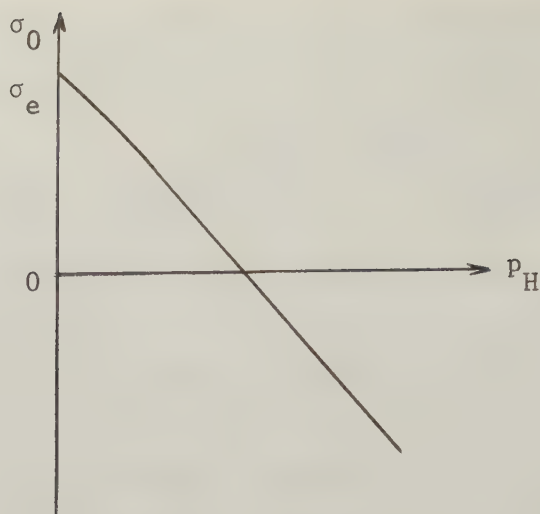


figure 8

Pour de telles pièces, les contraintes principales superficielles σ_{10} et σ_{20} sont sensiblement égales. La méthode consiste alors à utiliser le faisceau de courbes $\sigma_0 = f(p_H)$ obtenu pour différents échantillons dans différents états physico-chimiques. Pour une pièce donnée, on fait donc une mesure de dureté hertzienne. En utilisant la bonne courbe $\sigma_0 = f(p_H)$, on trouve donc σ_0 . Cette courbe est repérée à l'aide d'une mesure de dureté hertzienne, complétée par une mesure de dureté usuelle (Rockwell ou Vickers), sur un échantillon prélevé sur la pièce puis relaxé par usinage. Les auteurs ont mis au point une méthode analogue pour les pièces carbo-niturées.

3.1.2.3. L. HAUSSEGUY et H. MARTINOD [6] ont mis au point de leur côté, une méthode simple permettant de déterminer la valeur d'un état de contraintes superficielles uniaxial. Celle-ci consiste à mettre en tension (ou compression), la pièce dans la direction de la contrainte principale non nulle. Soit σ_{10} cette contrainte ($\sigma_{20} = 0$) et soit σ^* la contrainte (de tension ou de compression) créée à volonté. Pour $\sigma_{10} + \sigma^* \leq 0$, la dureté hertzienne ne change pas lorsque σ^* augmente, tandis que pour $\sigma_{10} + \sigma^* > 0$, elle diminue. D'où la détermination de σ_{10} par le tracé de la courbe $p_H = g(\sigma^*)$. Voir figure 9.

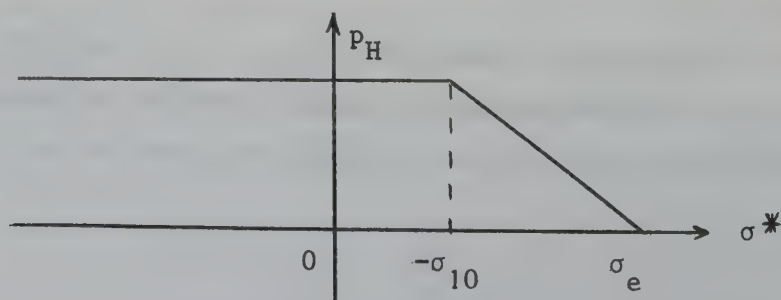


figure 9

3.2. - GENERALISATION DE LA METHODE DE DURETE HERTZIENNE

3.2.1. Préliminaires

Comme nous l'avons vu dans le chapitre (3.1.2), la méthode de dureté hertzienne utilisant un pénétrateur sphérique, ne peut déterminer que la plus grande algèbriquement des contraintes principales superficielles. Dans l'espoir de pouvoir déterminer la seconde contrainte principale et les directions principales, nous avons étudié ce que devenait cette méthode en utilisant un pénétrateur elliptique (par exemple celui de la figure 2).

Pour un tel pénétrateur, la dureté hertzienne se définit de la même manière que pour la bille : c'est la valeur p_H de p_0 (pression au centre de l'ellipse de contact) à partir de laquelle le contact passe du domaine élastique au domaine plastique. Elle se calcule à partir de P_H par la formule :

$$p_H = B(e) \left[\epsilon^{-2} P_H R_1^{-2} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (3.2.1.)$$

dans laquelle $B(e)$ est un coefficient déterminé par le tableau I.

Dans tout ce chapitre (3.2.1.), nous utiliserons comme axes de référence, les axes $(0, x_1, x_2, x_3)$ définis dans le chapitre (2.2.1.1.), pour lesquels Ox_1 est le plus grand axe de l'ellipse de contact, Ox_2 le plus petit, et Ox_3 la normale au centre 0 de l'ellipse, dirigé vers l'intérieur de la pièce. Si dans la zone, on peut considérer la pièce comme étant sphérique, voire plane, ces axes sont alors liés au pénétrateur, et la quantité R_1 de la formule (3.2.1.) ne dépend pas de la position (en rotation) de ces axes par rapport à la pièce.

Nous supposons qu'il existe à la surface de la pièce un champ de contraintes uniforme, de directions principales Oy_1 et Oy_2 , et de valeurs principales σ_{10} et σ_{20} ($\sigma_{30} = 0$). Nous poserons :

$$\theta = (\overrightarrow{Oy_1}, \overrightarrow{Ox_1}) \quad (3.2.2.)$$

Enfin, comme dans le paragraphe (3.1.2.1.), nous admettrons dans tout ce qui suit, que le point le plus chargé pour p_0 donné, se trouve sur l'axe Ox_3 .

3.2.2. Les directions principales sont connues :

La question que nous nous posons dans ce chapitre, est de savoir si, connaissant les valeurs de la dureté hertzienne pour deux valeurs de θ différentes, il est possible de trouver théoriquement les quantités σ_{10} et σ_{20} .

Il semble alors naturel de prendre $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$. Les valeurs de la dureté hertzienne seront alors :

$$p_H = p_H(0) \quad \text{et} \quad p'_H = p_H\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Nous justifierons ce choix dans le chapitre 3.2.3.

3.2.2.1. Détermination de p_H

Pour simplifier l'exposé, nous prenons comme critère de plasticité celui de Tresca ; c'est-à-dire que nous supposerons que la courbe intrinsèque de Mohr-Cauchy est composée de deux droites parallèles distantes de σ_e .

Au départ, nous avons donc :

$$|\sigma_{10}| < \sigma_e ; |\sigma_{20}| < \sigma_e \quad |\sigma_{20} - \sigma_{10}| < \sigma_e \quad (3.2.3.)$$

faisons $\theta = 0$. Pour $p_0 = p_H$, nous avons :

$$|\sigma_{11} - \sigma_{33}| \leq \sigma_e ; |\sigma_{22} - \sigma_{33}| \leq \sigma_e ; |\sigma_{22} - \sigma_{11}| \leq \sigma_e \quad (3.2.4.)$$

avec au moins une égalité dans ces expressions.

Sur la figure 10, nous avons représenté les variations de $\sigma_{1H} - \sigma_{3H}$, $\sigma_{2H} - \sigma_{3H}$ et $\sigma_{2H} - \sigma_{1H}$ en fonction de la quantité $\frac{x_3}{a}$, pour un pénétrateur elliptique quelconque.

$$\begin{aligned} \text{Posons :} \quad & \sup_{x_3/a} (\sigma_{1H} - \sigma_{3H}) = \alpha_{13} p_H \\ & \sup_{x_3/a} (\sigma_{2H} - \sigma_{3H}) = \alpha_{23} p_H \\ & \sup_{x_3/a} (\sigma_{2H} - \sigma_{1H}) = \alpha_{21} p_H \\ & \inf_{x_3/a} (\sigma_{2H} - \sigma_{1H}) = -\beta_{21} p_H \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \sup_{x_3/a} (\sigma_{1H} - \sigma_{3H}) = \alpha_{13} p_H \\ \sup_{x_3/a} (\sigma_{2H} - \sigma_{3H}) = \alpha_{23} p_H \\ \sup_{x_3/a} (\sigma_{2H} - \sigma_{1H}) = \alpha_{21} p_H \\ \inf_{x_3/a} (\sigma_{2H} - \sigma_{1H}) = -\beta_{21} p_H \end{aligned}} \right\} \quad (3.2.5.)$$

Les coefficients α_{ij} et β_{21} sont positifs (ainsi que p_H). En considérant (3.2.3.), (3.2.5.) et la figure 10, il est clair que les relations (3.2.4.) peuvent s'écrire :

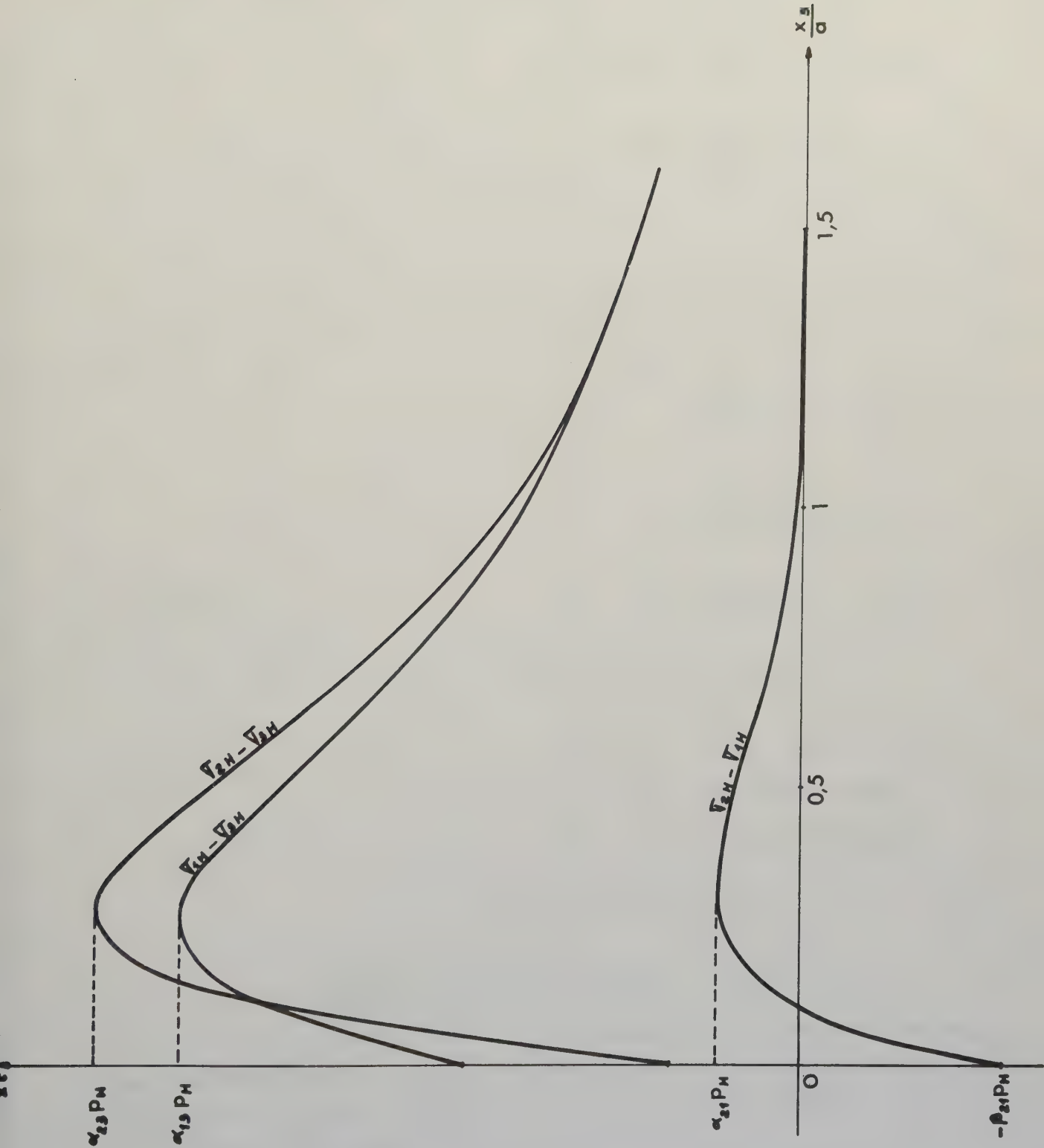


figure 10

$$\begin{aligned}
 \sigma_{10} + \alpha_{13} p_H &\leq \sigma_e \\
 \sigma_{20} + \alpha_{23} p_H &\leq \sigma_e \\
 \sigma_{20} - \sigma_{10} + \alpha_{21} p_H &\leq \sigma_e \\
 \sigma_{20} - \sigma_{10} - \beta_{21} p_H &\geq \sigma_e
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \sigma_{10} + \alpha_{13} p_H &\leq \sigma_e \\ \sigma_{20} + \alpha_{23} p_H &\leq \sigma_e \\ \sigma_{20} - \sigma_{10} + \alpha_{21} p_H &\leq \sigma_e \\ \sigma_{20} - \sigma_{10} - \beta_{21} p_H &\geq \sigma_e \end{aligned}} \right\} (3.2.6.)$$

ou encore :

$$\begin{aligned}
 p_H &\leq \frac{\sigma_e - \sigma_{10}}{\alpha_{13}} \\
 p_H &\leq \frac{\sigma_e - \sigma_{20}}{\alpha_{23}} \\
 p_H &\leq \frac{\sigma_e - \sigma_{20} + \sigma_{10}}{\alpha_{21}} \\
 p_H &\leq \frac{\sigma_e + \sigma_{20} - \sigma_{10}}{\beta_{21}}
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} p_H &\leq \frac{\sigma_e - \sigma_{10}}{\alpha_{13}} \\ p_H &\leq \frac{\sigma_e - \sigma_{20}}{\alpha_{23}} \\ p_H &\leq \frac{\sigma_e - \sigma_{20} + \sigma_{10}}{\alpha_{21}} \\ p_H &\leq \frac{\sigma_e + \sigma_{20} - \sigma_{10}}{\beta_{21}} \end{aligned}} \right\} (3.2.7.)$$

avec au moins une égalité

De (3.2.7.), nous tirons :

$$p_H = \frac{\sigma_e - \sigma_{10}}{\alpha_{13}} \quad \text{si} \quad \frac{\sigma_e - \sigma_{10}}{\alpha_{13}} \leq \begin{cases} \frac{\sigma_e - \sigma_{20}}{\alpha_{23}} \\ \frac{\sigma_e - \sigma_{20} + \sigma_{10}}{\alpha_{21}} \\ \frac{\sigma_e + \sigma_{20} - \sigma_{10}}{\beta_{21}} \end{cases} \quad (3.2.8.)$$

$$p_H = \frac{\sigma_e - \sigma_{20}}{\alpha_{23}} \quad \text{si} \quad \frac{\sigma_e - \sigma_{20}}{\alpha_{23}} \left| \begin{array}{l} \leq \frac{\sigma_e - \sigma_{10}}{\alpha_{13}} \\ \leq \frac{\sigma_e - \sigma_{20} + \sigma_{10}}{\alpha_{21}} \\ \leq \frac{\sigma_e + \sigma_{20} - \sigma_{10}}{\beta_{21}} \end{array} \right. \quad (3.2.5.)$$

$$p_H = \frac{\sigma_e - \sigma_{20} + \sigma_{10}}{\alpha_{21}} \quad \text{si} \quad \frac{\sigma_e - \sigma_{20} + \sigma_{10}}{\alpha_{21}} \left| \begin{array}{l} \leq \frac{\sigma_e - \sigma_{10}}{\alpha_{13}} \\ \leq \frac{\sigma_e - \sigma_{20}}{\alpha_{23}} \\ \leq \frac{\sigma_e + \sigma_{20} - \sigma_{10}}{\beta_{21}} \end{array} \right. \quad (3.2.10.)$$

$$p_H = \frac{\sigma_e + \sigma_{20} - \sigma_{10}}{\beta_{21}} \quad \text{si} \quad \frac{\sigma_e + \sigma_{20} - \sigma_{10}}{\beta_{21}} \left| \begin{array}{l} \leq \frac{\sigma_e - \sigma_{10}}{\alpha_{13}} \\ \leq \frac{\sigma_e - \sigma_{10}}{\alpha_{23}} \\ \leq \frac{\sigma_e - \sigma_{20} + \sigma_{10}}{\alpha_{21}} \end{array} \right. \quad (3.2.11.)$$

3.2.2.2. Représentation graphique

En n'oubliant pas les conditions (3.2.3.), on peut représenter graphiquement les résultats (3.2.8 à 11) en utilisant un système d'axes orthonormés $(\sigma_{10}, \sigma_{20})$. Les domaines définis dans ces résultats font intervenir les droites suivantes :

$$\begin{array}{ll}
 D_1 \text{ d'équation} & \frac{\sigma_e - \sigma_{10}}{\alpha_{13}} = \frac{\sigma_e - \sigma_{20}}{\alpha_{23}} \\
 D_2 \quad " & \frac{\sigma_e - \sigma_{10}}{\alpha_{13}} = \frac{\sigma_e - \sigma_{20} + \sigma_{10}}{\alpha_{21}} \\
 D_3 \quad " & \frac{\sigma_e - \sigma_{10}}{\alpha_{13}} = \frac{\sigma_e + \sigma_{20} - \sigma_{10}}{\beta_{21}} \\
 D_4 \quad " & \frac{\sigma_e - \sigma_{20}}{\alpha_{23}} = \frac{\sigma_e - \sigma_{20} + \sigma_{10}}{\alpha_{21}} \\
 D_5 \quad " & \frac{\sigma_e - \sigma_{20}}{\alpha_{23}} = \frac{\sigma_e + \sigma_{20} + \sigma_{10}}{\beta_{21}} \\
 D_6 \quad " & \frac{\sigma_e - \sigma_{20} + \sigma_{10}}{\alpha_{21}} = \frac{\sigma_e + \sigma_{20} - \sigma_{10}}{\beta_{21}}
 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{array}} \right\} (3.2.12.)$$

Il est facile de voir qu'il y a quatre triplets de droites concourantes :

$$(D_1, D_2, D_4) ; (D_1, D_3, D_5) ; (D_2, D_3, D_6) ; (D_4, D_5, D_6)$$

Plaçons-nous dans le cas où v est voisin de 0,3 (cas des aciers)

Quel que soit $\frac{R_2}{R_1} \leq 1$, on peut vérifier que l'on a les inégalités (voir figure 3) :

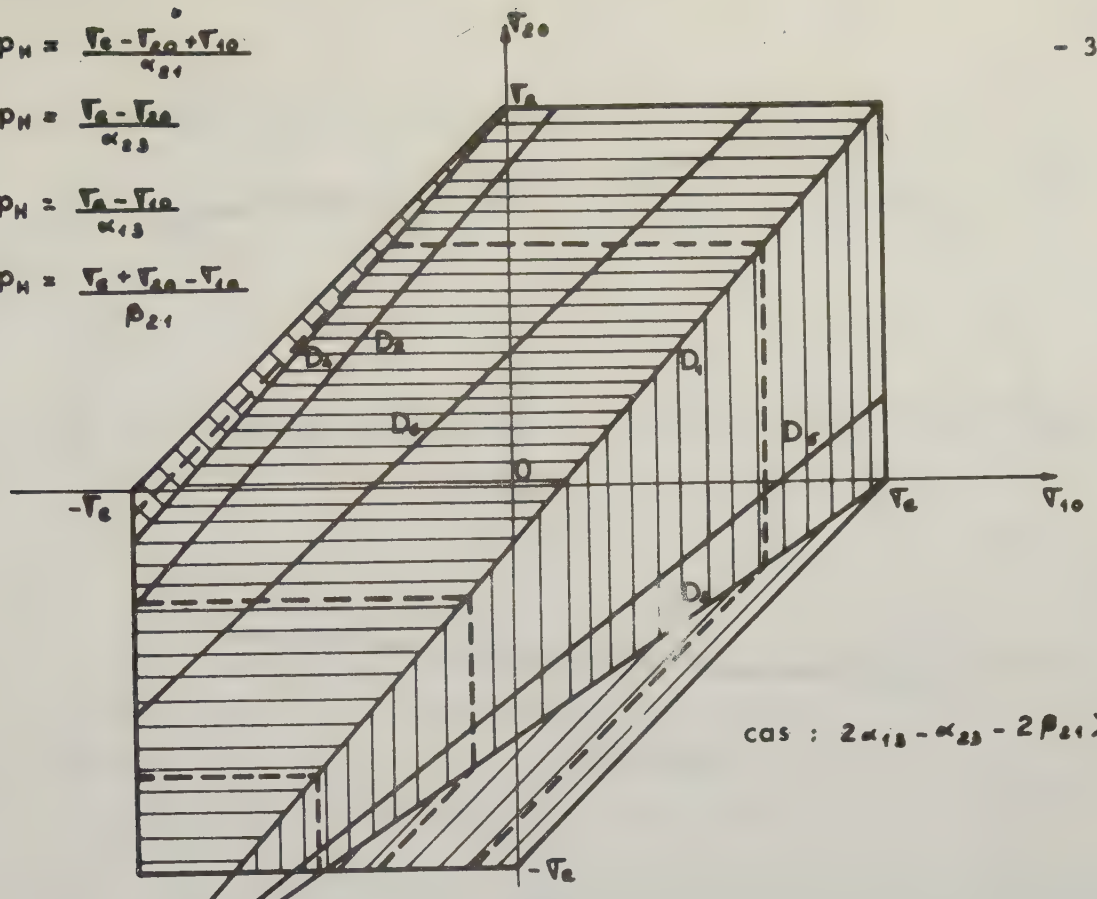
$$\alpha_{23} \geq \alpha_{13} ; \alpha_{13} > 2\alpha_{21} ; \alpha_{23} > \alpha_{21} + \beta_{21} ; \alpha_{13} > \beta_{21} \quad (3.2.13.)$$

On en déduit alors la figure 11 pour $\frac{R_2}{R_1} = 0,248$ et la figure 12 pour $\frac{R_2}{R_1} = 0$

Le point C intersection des droites D_1, D_3, D_5 a pour coordonnées :

$$\begin{array}{l}
 \sigma'_{10} = \frac{\alpha_{23} - 2\alpha_{13} + \beta_{21}}{\alpha_{23} - \alpha_{13} + \beta_{21}} \sigma_e \\
 \sigma'_{20} = \frac{-\alpha_{13} + \beta_{21}}{\alpha_{23} - \alpha_{13} + \beta_{21}} \sigma_e
 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \sigma'_{10} \\ \sigma'_{20} \end{array}} \right\} (3.2.14.)$$

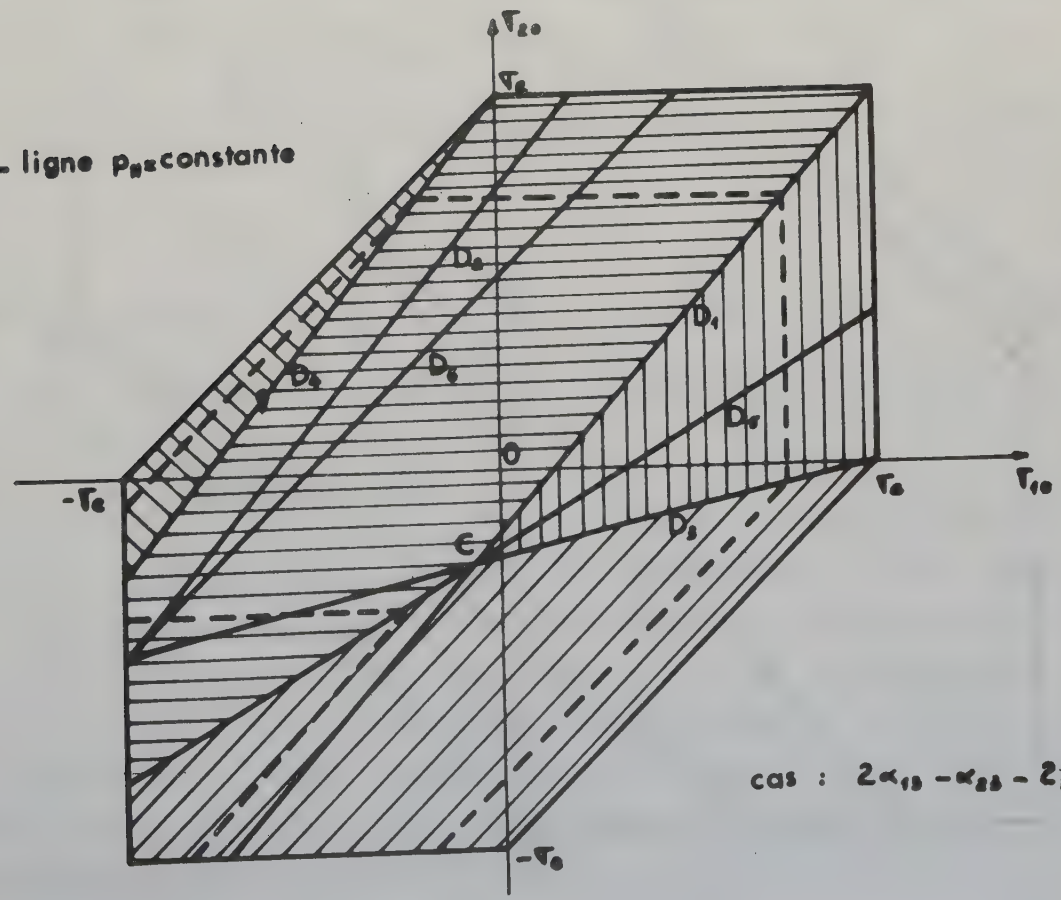
$\text{////} \quad p_H = \frac{\tau_e - \tau_{20} + \tau_{10}}{\alpha_{21}}$
 $\text{====} \quad p_H = \frac{\tau_e - \tau_{20}}{\alpha_{23}}$
 $\text{||||} \quad p_H = \frac{\tau_e - \tau_{10}}{\alpha_{13}}$
 $\text{////} \quad p_H = \frac{\tau_e + \tau_{20} - \tau_{10}}{\beta_{21}}$



cas : $2\alpha_{13} - \alpha_{23} - 2\beta_{21} > 0$

figure 11

--- ligne $p_H = \text{constante}$



cas : $2\alpha_{13} - \alpha_{23} - 2\beta_{21} < 0$

figure 12

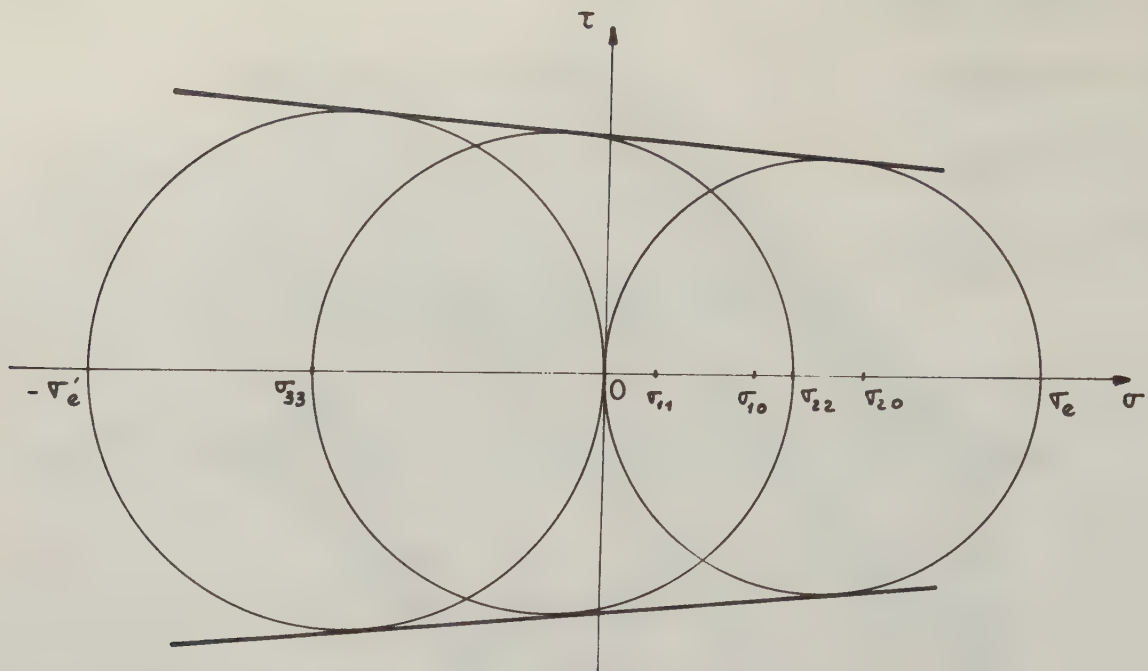


figure 13

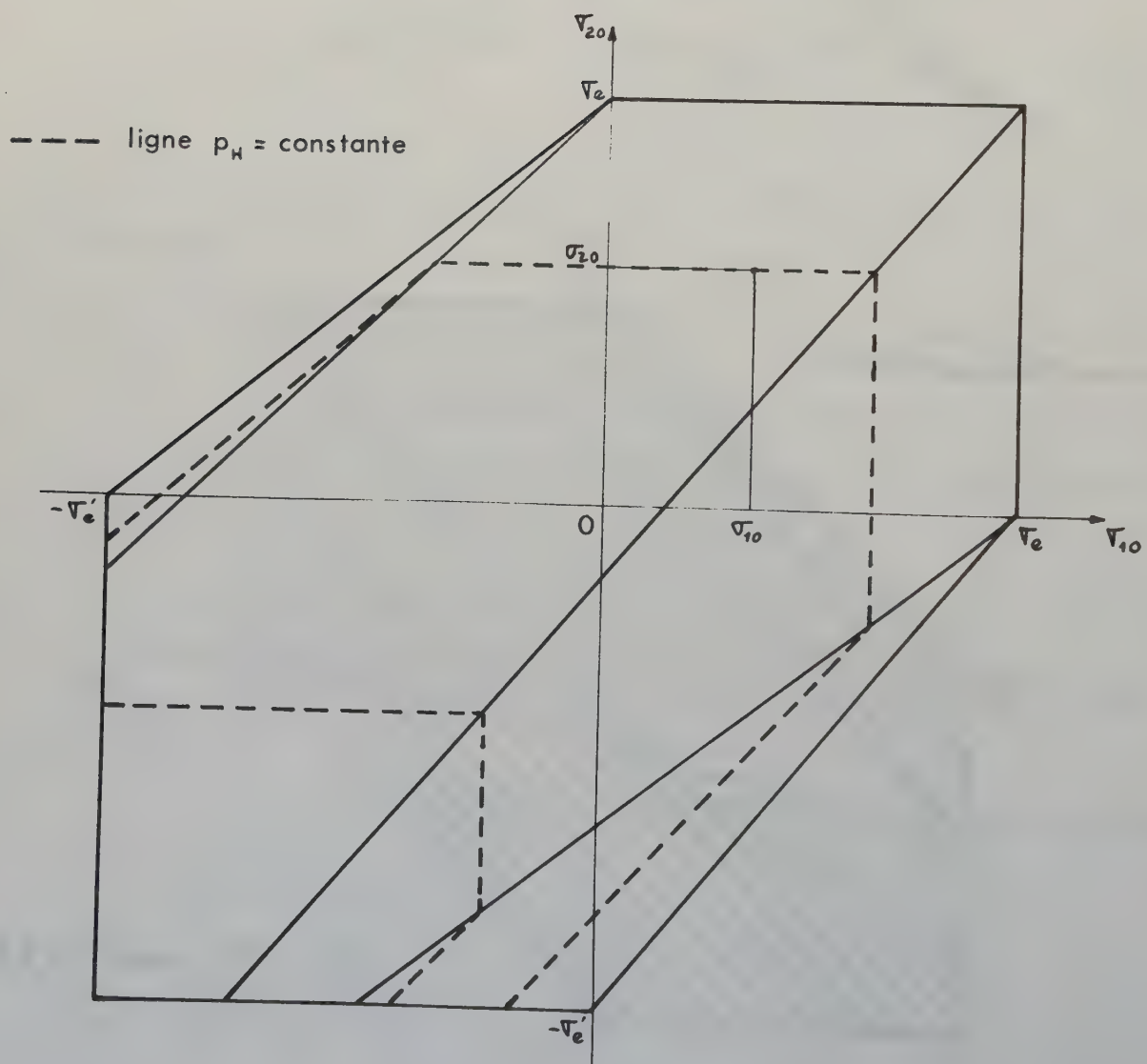


figure 14

Les inégalités (3.2.13.) donnent : $0 > \sigma'_{10} \geq \sigma'_{20}$

Nous avons alors deux cas : $\sigma'_{20} \leq -\sigma_e$ et $\sigma'_{20} > -\sigma_e$, qui donnent respectivement :

$$2\alpha_{13} - \alpha_{23} - 2\beta_{21} \geq 0 \quad \text{et} \quad 2\alpha_{13} - \alpha_{23} - 2\beta_{21} < 0$$

Sur chacune des figures 11 et 12, nous avons tracé quelques courbes $p_H = \text{constante}$.

REMARQUE 1 :

Les droites D_2 et D_6 n'ont pas de rôle dans la délimitation des domaines pour ν voisin de 0,3. Si l'on fait varier le rapport $\frac{R_2}{R_1}$ de 0 à 1 la figure se déforme.

Pour $\frac{R_2}{R_1} = 0$ on a la figure 12. Lorsque $\frac{R_2}{R_1}$ augmente, le point C se déplace

sur D_1 , vers les σ_{10} infinis négatifs, la droite D_1 se rapproche de la première bissectrice, et les droites D_3 et D_4 tendent à devenir parallèles à cette bissectrice. A la limite, lorsque $\frac{R_2}{R_1} = 1$, l'hexagone est partagé par la première bissectrice seule.

D'un côté, il y a alors le domaine pour lequel $\sigma_{20} > \sigma_{10}$ dans lequel $p_H = \frac{\sigma_e - \sigma_{20}}{\alpha_{23}}$, de l'autre, le domaine $\sigma_{20} < \sigma_{10}$ avec

$p_H = \frac{\sigma_e - \sigma_{10}}{\alpha_{13}}$ (avec $\alpha_{13} = \alpha_{23}$). On retrouve donc les conclusions du paragraphe 3.1.2.1.

REMARQUE 2 :

Sur la figure 10, la quantité $-\beta_{21} p_H$ correspond à un pic de contrainte. Si dans (3.2.7.) l'égalité doit être

$$p_H = \frac{\sigma_e + \sigma_{20} - \sigma_{10}}{\beta_{21}}$$

il est possible que l'expérience ne confirme pas ce résultat. En effet, dans ce cas, la lentille plastique créée par le pénétrateur sera peu épaisse par rapport à celle créée dans les autres cas. Pour qu'il y ait une déformation sensible, surtout dans le cas où l'on mesure les enfoncements résiduels de la bille (chapitre V), il faudra certainement que p_0 soit nettement supérieur à p_H . Il est donc possible que tout se passe comme si la quantité β_{21} était sensiblement plus petite. Seul le cas de la figure 11 pourrait alors être utilisé.

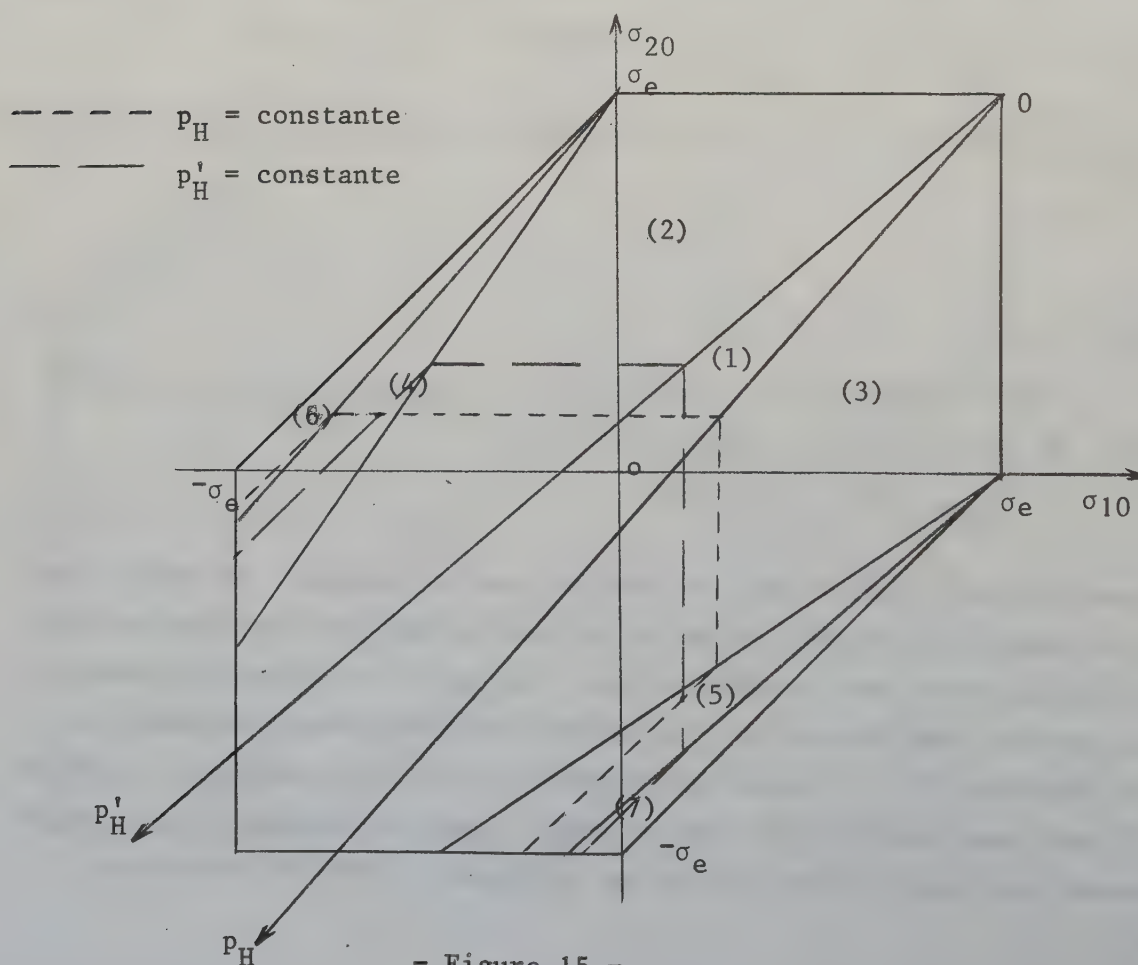
REMARQUE 3 :

Pour la plupart des métaux, la courbe intrinsèque de Mohr-Caquot n'est pas composée de deux droites parallèles. Par une courbe intrinsèque et pour $\frac{R_2}{R_1}$ donnés, il existera un diagramme semblable à celui de la figure 11, sur lequel on aura pu tracer les courbes $p_H = \text{cte}$

Par exemple pour la courbe intrinsèque de la figure 13 et pour $\frac{R_2}{R_1} = 0,248$, nous avons obtenu le diagramme de la figure 14. Néanmoins, pour simplifier l'exposé, nous considérerons encore des courbes composées de deux droites parallèles.

3.2.2.3. Relations entre σ_{10} , σ_{20} , p_H et p'_H

Si maintenant, nous faisons $\theta = \frac{\pi}{2}$, p_H devient p'_H . Nous obtenons les mêmes résultats que précédemment en échangeant les quantités σ_{10} et σ_{20} . Les diagrammes deviennent symétriques de ceux trouvés pour $\theta=0$. Nous pouvons alors les superposer et tracer les lignes $p_H = \text{constante}$ et $p'_H = \text{constante}$. La figure 11 donne alors la figure 15.



- Figure 15 -

A l'intérieur de :

$$(1): \quad p_H = \frac{\sigma_e - \sigma_{20}}{\alpha_{23}} \quad p'_H = \frac{\sigma_e - \sigma_{10}}{\alpha_{23}} \quad (3.2.15.)$$

$$(2): \quad p_H = \frac{\sigma_e - \sigma_{20}}{23} \quad p'_H = \frac{\sigma_e - \sigma_{20}}{\alpha_{13}} \quad (3.2.16.)$$

$$(3): \quad p_H = \frac{\sigma_e - \sigma_{10}}{\alpha_{13}} \quad p'_H = \frac{\sigma_e - \sigma_{10}}{\alpha_{23}} \quad (3.2.17.)$$

$$(4): \quad p_H = \frac{\sigma_e - \sigma_{20}}{\alpha_{23}} \quad p'_H = \frac{\sigma_e - \sigma_{20} + \sigma_{10}}{\beta_{21}} \quad (3.2.18.)$$

$$(5): \quad p_H = \frac{\sigma_e + \sigma_{20} - \sigma_{10}}{\beta_{21}} \quad p'_H = \frac{\sigma_e - \sigma_{10}}{\alpha_{23}} \quad (3.2.19.)$$

$$(6): \quad p_H = \frac{\sigma_e - \sigma_{20} + \sigma_{10}}{\alpha_{21}} \quad p'_H = \frac{\sigma_e - \sigma_{20} + \sigma_{10}}{\beta_{21}} \quad (3.2.20.)$$

$$(7): \quad p_H = \frac{\sigma_e + \sigma_{20} - \sigma_{10}}{\beta_{21}} \quad p'_H = \frac{\sigma_e + \sigma_{20} - \sigma_{10}}{\alpha_{21}} \quad (3.2.21.)$$

Remarquons qu'il est très facile de graduer les axes p_H et p'_H (graduations linéaires). Etant données deux valeurs p_{Ho} et p'_{Ho} , il est donc possible de préciser les contraintes principales correspondantes. Sur un diagramme semblable à celui de la figure 15, on trace les lignes :

$$p_H = p_{Ho} \quad \text{et} \quad p'_H = p'_{Ho}$$

Si un point est commun à ces deux lignes, il donne des valeurs de σ_{10} et σ_{20} possibles.

A un couple (p_{Ho}, p'_{Ho}) ne correspond pas nécessairement un couple $(\sigma_{10}, \sigma_{20})$. Sur la figure 15, nous en avons 3. Il peut en exister une infinité

(par exemple si $\frac{p_{Ho}}{p'_{Ho}} = \frac{\alpha_{23}}{\alpha_{12}}$) ou pas du tout.

La figure 15 est théorique. Expérimentalement les diagrammes obtenus doivent être différents. En effet, d'après la remarque 2 du chapitre précédent les zones (4) et (5) seront certainement plus petites. D'autre part, d'après la remarque 3 du même chapitre, les diagrammes expérimentaux ressembleront à celui de la figure 15 moyennant une certaine dilatation dans le 3ème cadran.

3.2.2.4. Conclusion

La méthode de dureté hertzienne utilisant un pénétrateur elliptique, peut donc déterminer la plus grande et dans certains cas les deux contraintes principales superficielles, lorsque les directions principales sont connues. Pour cela, il suffit de faire deux mesures à $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$ et d'utiliser le diagramme (semblable à celui de la figure 15) correspondant.

Le maximum de sensibilité de cette méthode sera obtenu pour des pénétrateurs tels que la zone (1) soit la plus grande possible. Il faut donc que le rapport $\frac{\alpha_{13}}{\alpha_{23}}$ soit le plus petit possible.

3.2.3. Les directions principales sont inconnues (étude théorique)

3.2.3.1. Préliminaires

Nous nous proposons de déterminer la variation de p_H lorsque θ varie. La fonction $p_H(\theta)$ est une fonction de période π ; on doit avoir aussi $p_H(\theta) = p_H(\pi - \theta)$ (puisque nous supposons que la pièce est isotrope). Nous supposons donc que θ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$

Dans les axes $(0, x_1, x_2, x_3)$ le tenseur des contraintes s'écrit lorsque $p_0 = p_H$ pour un point quelconque de l'axe ox_3 :

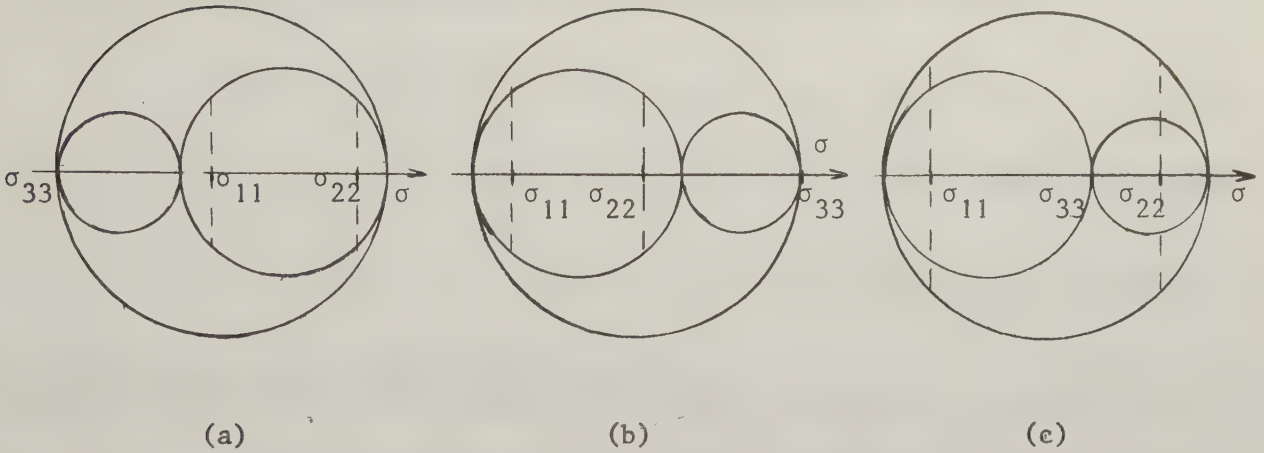
$$\begin{pmatrix} \sigma_{1H} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{2H} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{3H} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{10} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ +\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_{1H} + \sigma_{10} \cos^2\theta + \sigma_{20} \sin^2\theta & (\sigma_{20} - \sigma_{10}) \sin\theta \cos\theta & 0 \\ (\sigma_{20} - \sigma_{10}) \sin\theta \cos\theta & \sigma_{2H} + \sigma_{10} \sin^2\theta + \sigma_{20} \cos^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{3H} \end{pmatrix} \quad (3.2.22.)$$

d'où

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{11} = \sigma_{1H} + \sigma_{10} \cos^2\theta + \sigma_{20} \sin^2\theta \\ \sigma_{22} = \sigma_{2H} + \sigma_{10} \sin^2\theta + \sigma_{20} \cos^2\theta \\ \sigma_{33} = \sigma_{3H} \\ \sigma_{12} = (\sigma_{20} - \sigma_{10}) \sin\theta \cos\theta \end{array} \right\} \quad (3.2.23.)$$

Le tricerclle de Mohr peut a priori avoir 6 dispositions : les trois de la figure 16 et les trois mêmes en échangeant σ_{11} et σ_{22}



- Figure 16 -

Les grands cercles de Mohr ont pour diamètre :

$$\text{cas (a) : } \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \sigma_{33} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}$$

$$\text{cas (b) : } -\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \sigma_{33} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}$$

$$\text{cas (c) : } 2 \sqrt{\left(\frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}$$

Pour $p_o = p_H$ et en chaque point de l'axe ox_3 , nous devons donc avoir, en considérant toujours le critère de Tresca :

$$\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \sigma_{33} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} \leq \sigma_e \quad (3.2.24.)$$

$$-\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \sigma_{33} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} \leq \sigma_e \quad (3.2.25.)$$

$$2 \sqrt{\left(\frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} \leq \sigma_e \quad (3.2.26.)$$

avec au moins une égalité dans les relations précédentes pour le ou les points ayant le plus grand cercle de Mohr.

Montrons qu'il ne peut pas y avoir d'égalité dans la relation (3.2.25.) .

Supposons $(\sigma_{2H} - \sigma_{1H})(\sigma_{20} - \sigma_{10}) \geq 0$

Nous avons d'après (3.2.23.)

$$\begin{aligned} & -\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \sigma_{33} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} \\ &= -\frac{\sigma_{1H} + \sigma_{2H}}{2} + \sigma_{3H} - \frac{\sigma_{10} + \sigma_{20}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{2H} - \sigma_{1H}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{20} - \sigma_{10}}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{\sigma_{2H} - \sigma_{1H}}{2}\right)\left(\frac{\sigma_{20} - \sigma_{10}}{2}\right)\cos 2\theta} \\ &= -\frac{\sigma_{1H} + \sigma_{2H}}{2} + \sigma_{3H} - \frac{\sigma_{10} + \sigma_{20}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{2H} - \sigma_{1H} + \sigma_{20} - \sigma_{10})^2 - 2(1 - \cos 2\theta)(\sigma_{2H} - \sigma_{1H})(\sigma_{20} - \sigma_{10})} \\ &\leq -\frac{\sigma_{1H} + \sigma_{2H}}{2} + \sigma_{3H} - \frac{\sigma_{10} + \sigma_{20}}{2} + \left| \frac{\sigma_{2H} - \sigma_{1H}}{2} + \frac{\sigma_{20} - \sigma_{10}}{2} \right| \end{aligned}$$

Or, quel que soit $\frac{R^2}{R_1}$, on a $\sigma_{3H} \leq \sigma_{1H}$, $\sigma_{3H} \leq \sigma_{2H}$, d'autre part, on suppose

$$|\sigma_{10}| < \sigma_e \quad \text{et} \quad |\sigma_{20}| < \sigma_e$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} & -\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \sigma_{33} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} \\ & \left| \begin{aligned} & \leq -\sigma_{1H} + \sigma_{3H} - \sigma_{10} < \sigma_e \quad \underline{\text{si}} \quad \sigma_{2H} - \sigma_{1H} + \sigma_{20} - \sigma_{10} \geq 0 \\ & \leq -\sigma_{2H} + \sigma_{3H} - \sigma_{20} < \sigma_e \quad \underline{\text{si}} \quad \sigma_{2H} - \sigma_{1H} + \sigma_{20} - \sigma_{10} < 0 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Si $(\sigma_{2H} - \sigma_{1H})(\sigma_{20} - \sigma_{10}) < 0$, nous avons une démonstration tout-à-fait analogue en faisant apparaître $(\sigma_{2H} - \sigma_{1H} - \sigma_{20} + \sigma_{10})^2$ sous le radical.

3.2.3.2. Relations entre p_H , θ , σ_{10} et σ_{20} :

D'après ce qui précède, il ne peut y avoir de signe égal que dans les expressions (3.2.24.) et (3.2.26.). Cherchons les points qui rendent maximum les membres de gauche de ces expressions.

$$\text{Posons : } \frac{x_3}{a} = v \quad (3.2.27.)$$

$$\sigma_{1H} - \sigma_{3H} = \alpha_{13}(v) p_H \quad (3.2.28.)$$

$$\sigma_{2H} - \sigma_{3H} = \alpha_{23}(v) p_H \quad (3.2.29.)$$

$$\sigma_{2H} - \sigma_{1H} = \alpha_{21}(v) p_H \quad (3.2.30.)$$

Le membre de gauche de (3.2.24.) s'écrit aussi en considérant (3.2.23.) et (3.2.28. et 29.)

$$\frac{\alpha_{13}(v) + \alpha_{23}(v)}{2} p_H + \frac{\sigma_{10} + \sigma_{20}}{2} + \sqrt{\left[\frac{\alpha_{23}(v) - \alpha_{13}(v)}{2} p_H + \frac{\sigma_{20} - \sigma_{10}}{2} \cos 2\theta \right]^2 + \left(\frac{\sigma_{20} - \sigma_{10}}{2} \right)^2 \sin^2 2\theta} \quad (3.2.31.)$$

La dérivée de cette expression s'écrit :

$$\frac{d}{dv} \left[\frac{\alpha_{13}(v) + \alpha_{23}(v)}{2} \right] p_H + \frac{\left[\frac{\alpha_{23}(v) - \alpha_{13}(v)}{2} p_H + \frac{\sigma_{20} - \sigma_{10}}{2} \cos 2\theta \right] \frac{d}{dv} \left[\frac{\alpha_{23}(v) - \alpha_{13}(v)}{2} \right] p_H}{\sqrt{\left[\frac{\alpha_{23}(v) - \alpha_{13}(v)}{2} p_H + \frac{\sigma_{20} - \sigma_{10}}{2} \cos 2\theta \right]^2 + \left(\frac{\sigma_{20} - \sigma_{10}}{2} \right)^2 \sin^2 2\theta}}$$

Il est facile de voir que cette dérivée peut se mettre sous la forme

$$H(v, \theta) \frac{d}{dv} \alpha_{13}(v) + K(v, \theta) \frac{d}{dv} \alpha_{23}(v)$$

H et K étant deux fonctions positives ou nulles.

Les quantités $\frac{d}{dv} \alpha_{13}(v)$ et $\frac{d}{dv} \alpha_{23}(v)$ ne s'annulent qu'une seule fois, respectivement pour les valeurs v_1 et v_2 , avec $v_1 \leq v_2$ (voir figure 10). Or, quel que soit $\frac{R_2}{R_1}$, v_1 et v_2 sont voisines. Nous admettrons donc

avec une bonne approximation que la dérivée de la quantité (3.2.31.) s'annule pour v voisin de v_1 et v_2 , et qu'en conséquence cette expression est maximum pour $\alpha_{13}(v) = \alpha_{13}$ et $\alpha_{23}(v) = \alpha_{23}$, α_{13} et α_{23} étant définis par (3.2.5.)

(3.2.24.) devient donc pour le point le plus chargé :

$$\boxed{\frac{\alpha_{13} + \alpha_{23}}{2} p_H + \frac{\sigma_{10} + \sigma_{20}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{[(\alpha_{23} - \alpha_{13}) p_H + (\sigma_{20} - \sigma_{10}) \cos 2\theta]^2 + (\sigma_{20} - \sigma_{10})^2 \sin^2 2\theta} \leq \sigma_e} \quad (3.2.32.)$$

D'autre part, le membre de gauche de (3.2.26.) s'écrit en considérant (3.2.23.) et (3.2.30.) :

$$\sqrt{[\alpha_{21}(v) p_H + (\sigma_{20} - \sigma_{10}) \cos 2\theta]^2 + (\sigma_{20} - \sigma_{10})^2 \sin^2 2\theta} \quad (3.2.33.)$$

Pour que cette expression soit maximum en v , il faut et il suffit que :

$$|\alpha_{21}(v) p_H + (\sigma_{20} - \sigma_{10}) \cos 2\theta| \quad \text{le soit}$$

Les extrema de $\alpha_{21}(v) p_H + (\sigma_{20} - \sigma_{10}) \cos 2\theta$ sont :

$$\alpha_{21} p_H + (\sigma_{20} - \sigma_{10}) \cos 2\theta \quad \text{et} \quad -\beta_{21} p_H + (\sigma_{20} - \sigma_{10}) \cos 2\theta$$

$$\text{avec } \beta_{21} \geq \alpha_{21} \quad [\text{voir (3.2.5.)}]$$

On trouve alors que (3.2.33.) est maximum pour :

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{21}(v) &= \alpha_{21} & \text{si } (\sigma_{20} - \sigma_{10}) \cos 2\theta &\geq \frac{\beta_{21} - \alpha_{21}}{2} p_H \\ \alpha_{21}(v) &= -\beta_{21} & \text{si } (\sigma_{20} - \sigma_{10}) \cos 2\theta &< \frac{\beta_{21} - \alpha_{21}}{2} p_H \end{aligned} \right\} \quad (3.2.34.)$$

(3.2.26.) devient pour le point le plus chargé :

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{si } (\sigma_{20} - \sigma_{10}) \cos 2\theta \geq \frac{\beta_{21} - \alpha_{21}}{2} p_H : \\ &\sqrt{[\alpha_{21} p_H + (\sigma_{20} - \sigma_{10}) \cos 2\theta]^2 + (\sigma_{20} - \sigma_{10})^2 \sin^2 2\theta} \leq \sigma_e \\ &\text{si } (\sigma_{20} - \sigma_{10}) \cos 2\theta < \frac{\beta_{21} - \alpha_{21}}{2} p_H : \\ &\sqrt{[-\beta_{21} p_H + (\sigma_{20} - \sigma_{10}) \cos 2\theta]^2 + (\sigma_{20} - \sigma_{10})^2 \sin^2 2\theta} \leq \sigma_e \end{aligned}} \quad (3.2.35.)$$

En conclusion, nous disons que les expressions (3.2.32.) et (3.2.35.) doivent être satisfaites pour $p_0 = p_H$ et qu'il y a au moins une égalité.

3.2.3.3. Etude de la première relation (3.2.32.)

Considérons l'égalité :

$$\frac{\alpha_{13} + \alpha_{23}}{2} p_o + \frac{\sigma_{10} + \sigma_{20}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{[(\alpha_{23} - \alpha_{13}) p_o + (\sigma_{20} - \sigma_{10}) \cos 2\theta]^2 + (\sigma_{20} - \sigma_{10})^2 \sin^2 2\theta} = \sigma_e \quad (3.2.36.)$$

Pour simplifier les calculs posons :

$$\underline{\sigma'_{10} = \sigma_e - \sigma_{10}} \quad \text{et} \quad \underline{\sigma'_{20} = \sigma_e - \sigma_{20}} \quad (3.2.36.bis)$$

(3.2.36.) devient :

$$\sqrt{[(\alpha_{23} - \alpha_{13}) p_o - (\sigma'_{20} - \sigma'_{10}) \cos 2\theta]^2 + (\sigma'_{20} - \sigma'_{10})^2 \sin^2 2\theta} = \sigma'_{10} + \sigma'_{20} - (\alpha_{13} + \alpha_{23}) p_o$$

Supposons

$$p_o \leq \frac{\sigma'_{10} + \sigma'_{20}}{\alpha_{13} + \alpha_{23}} \quad (3.2.37.)$$

en élevant au carré et après simplifications, l'expression précédente devient :

$$2 \alpha_{13} \alpha_{23} p_o^2 - [(\alpha_{13} + \alpha_{23})(\sigma'_{10} + \sigma'_{20}) - (\alpha_{23} - \alpha_{13})(\sigma'_{20} - \sigma'_{10}) \cos 2\theta] p_o + 2 \sigma'_{10} \sigma'_{20} = 0 \quad (3.2.38.)$$

ou encore :

$$f(p_o) = \alpha_{13} \alpha_{23} p_o^2 - [(\alpha_{13} \sigma'_{20} + \alpha_{23} \sigma'_{10}) \cos^2 \theta + (\alpha_{13} \sigma'_{10} + \alpha_{23} \sigma'_{20}) \sin^2 \theta] p_o + \sigma'_{10} \sigma'_{20} = 0 \quad (3.2.39.)$$

De plus nous avons, après simplifications :

$$f\left(\frac{\sigma'_{10} + \sigma'_{20}}{\alpha_{13} + \alpha_{23}}\right) = - \frac{1}{(\alpha_{13} + \alpha_{23})^2} \left[(\alpha_{13} \sigma'_{20} - \alpha_{23} \sigma'_{10})^2 \cos^2 \theta + (\alpha_{13} \sigma'_{10} - \alpha_{23} \sigma'_{20})^2 \sin^2 \theta \right] \leq 0 \quad (3.2.40.)$$

En considérant (3.2.27.) et (3.2.40.), nous en concluons donc que pour trouver la solution en p_o de l'équation (3.2.36.), il suffit de prendre la plus petite racine de l'équation (3.2.39.). Nous avons donc :

$$p_o(\theta) = \frac{(\alpha_{13} \sigma'_{20} + \alpha_{23} \sigma'_{10}) \cos^2 \theta + (\alpha_{13} \sigma'_{10} + \alpha_{23} \sigma'_{20}) \sin^2 \theta}{2 \alpha_{13} \alpha_{23}} + \frac{\sqrt{[(\alpha_{13} \sigma'_{20} + \alpha_{23} \sigma'_{10}) \cos^2 \theta + (\alpha_{13} \sigma'_{10} + \alpha_{23} \sigma'_{20}) \sin^2 \theta]^2 - 4 \alpha_{13} \alpha_{23} \sigma'_{10} \sigma'_{20}}}{2 \alpha_{13} \alpha_{23}}$$

(3.2.41.)

Faisons une représentation polaire de $p_o = p_o(\theta)$.

$$\frac{d}{d\theta} p_o(\theta) = \frac{(\alpha_{13} - \alpha_{23})(\sigma'_{10} - \sigma'_{20}) \sin \theta \cos \theta}{\alpha_{13} \alpha_{23}} \times$$

$$\times \left\{ 1 - \frac{(\alpha_{13} \sigma'_{20} + \alpha_{23} \sigma'_{10}) \cos^2 \theta + (\alpha_{13} \sigma'_{10} + \alpha_{23} \sigma'_{20}) \sin^2 \theta}{\sqrt{[(\alpha_{13} \sigma'_{20} + \alpha_{23} \sigma'_{10}) \cos^2 \theta + (\alpha_{13} \sigma'_{10} + \alpha_{23} \sigma'_{20}) \sin^2 \theta]^2 - 4 \alpha_{13} \alpha_{23} \sigma'_{10} \sigma'_{20}}} \right\}$$

La partie entre crochets est toujours négative. Pour $\alpha_{13}, \alpha_{23}, \sigma'_{10}, \sigma'_{20}$ donnés, la fonction $p_o(\theta)$ est monotone dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$. Dans le cas d'un pénétrateur sphérique ou dans le cas $\sigma'_{10} = \sigma'_{20}$, on retrouve la propriété évidente $p_H(\theta) = \text{constante}$ (lorsque $p_o = p_H$).

$$p_o(0) = \frac{\alpha_{13} \sigma'_{20} + \alpha_{23} \sigma'_{10} - |\alpha_{13} \sigma'_{20} - \alpha_{23} \sigma'_{10}|}{2 \alpha_{13} \alpha_{23}}$$

$$p_o(0) \left| \begin{array}{ll} = \frac{\sigma'_{10}}{\alpha_{13}} & \text{si } \frac{\sigma'_{20}}{\alpha_{23}} \geq \frac{\sigma'_{10}}{\alpha_{13}} \\ = \frac{\sigma'_{20}}{\alpha_{23}} & \text{si } \frac{\sigma'_{20}}{\alpha_{23}} < \frac{\sigma'_{10}}{\alpha_{13}} \end{array} \right. \quad (3.2.42.)$$

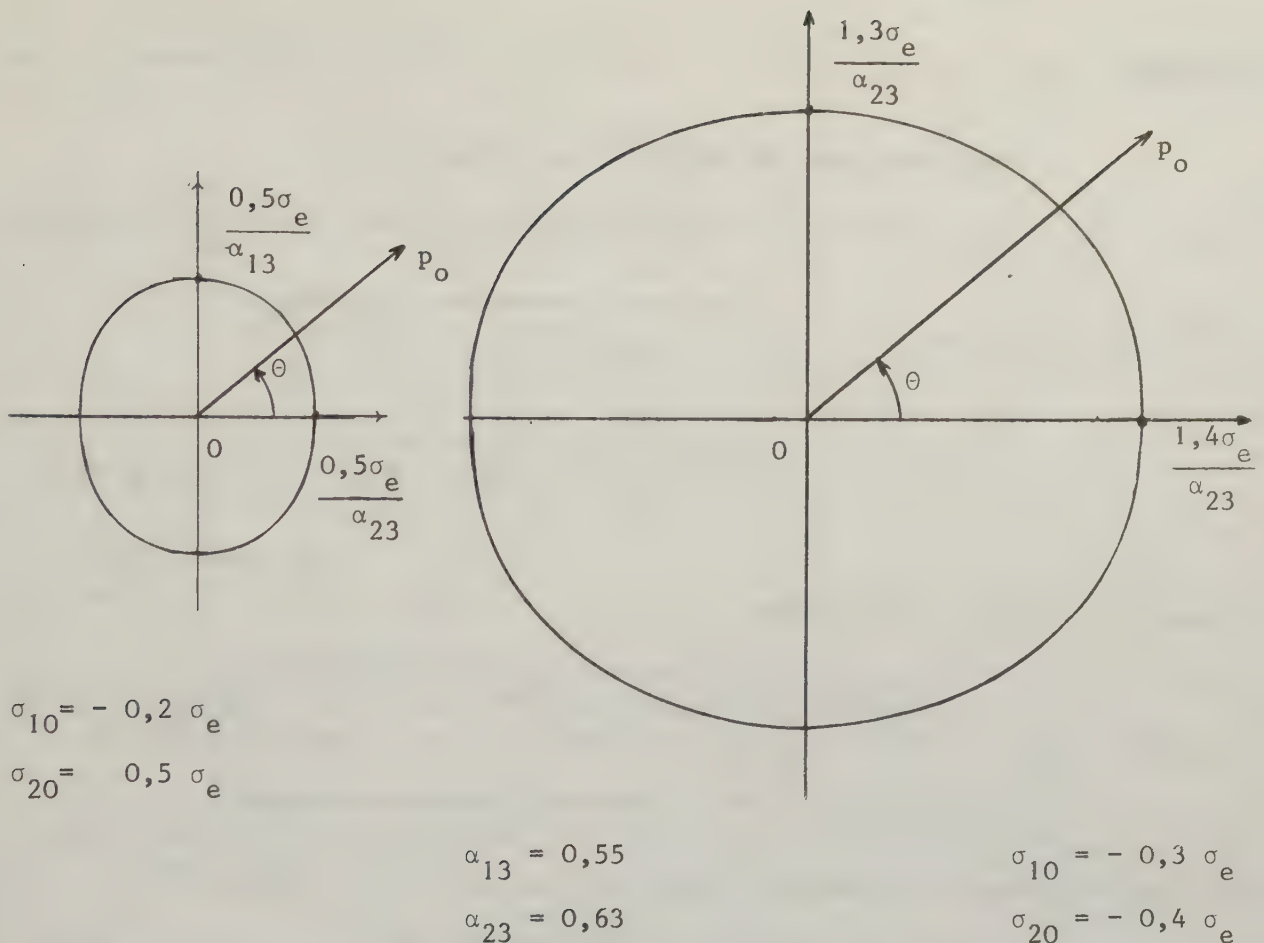
$$p_o\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\alpha_{13} \sigma'_{10} + \alpha_{23} \sigma'_{20} - |\alpha_{13} \sigma'_{10} - \alpha_{23} \sigma'_{20}|}{2 \alpha_{13} \alpha_{23}}$$

$$p_o\left(\frac{\pi}{2}\right) \left| \begin{array}{ll} = \frac{\sigma'_{20}}{\alpha_{13}} & \text{si } \frac{\sigma'_{10}}{\alpha_{23}} \geq \frac{\sigma'_{20}}{\alpha_{13}} \\ = \frac{\sigma'_{10}}{\alpha_{23}} & \text{si } \frac{\sigma'_{10}}{\alpha_{23}} < \frac{\sigma'_{20}}{\alpha_{13}} \end{array} \right. \quad (3.2.43.)$$

En prenant les mêmes notations que dans le chapitre (3.2.2.), lorsque

$$p_o(0) = p_H \quad \text{et} \quad p_o\left(\frac{\pi}{2}\right) = p'_H$$

les relations (3.2.42.) et (3.2.43.) donnent les mêmes résultats que (3.2.15.) (3.2.16.) et (3.2.17.).



- Figure 17 -

En coordonnées polaires, les courbes $p_o = p_o(\theta)$ ont la forme d'une ellipse de faible excentricité. Sur la figure 17, nous avons pris deux cas particuliers.

Pour $p_o(\theta) = p_H(\theta)$, lorsque θ varie, $p_H(\theta)$ varie entre les valeurs $p_H = p_H(0)$ et $p'_H = p_H(\frac{\pi}{2})$. Ces deux valeurs sont les plus éloignées possibles l'une de l'autre. Nous justifions ainsi a posteriori le choix ($\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$) fait dans le chapitre (3.2.2.).

3.2.3.4. Etude de la seconde relation (3.2.35.)

Considérons la relation :

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{[\alpha_{21} p_o + (\sigma_{20} - \sigma_{10}) \cos 2\theta]^2 + (\sigma_{20} - \sigma_{10})^2 \sin^2 2\theta} &= \sigma_e \text{ si } (\sigma_{20} - \sigma_{10}) \cos 2\theta > \frac{\beta_{21} - \alpha_{21}}{2} p_o \\ \sqrt{[\beta_{21} p_o + (\sigma_{20} - \sigma_{10}) \cos 2\theta]^2 + (\sigma_{20} - \sigma_{10})^2 \sin^2 2\theta} &= \sigma_e \text{ si } (\sigma_{20} - \sigma_{10}) \cos 2\theta < \frac{\beta_{21} - \alpha_{21}}{2} p_o \end{aligned} \right\} (3.2.44)$$

Supposons $\sigma_{20} \geq \sigma_{10}$:

La première égalité de (3.2.44.) donne :

$$[\alpha_{21} p_o + (\sigma_{20} - \sigma_{10}) \cos 2\theta]^2 = \sigma_e^2 - (\sigma_{20} - \sigma_{10})^2 \sin^2 2\theta \quad (3.2.45.)$$

$$\text{or } |(\sigma_{20} - \sigma_{10}) \cos 2\theta| = \sqrt{(\sigma_{20} - \sigma_{10})^2 - (\sigma_{20} - \sigma_{10})^2 \sin^2 2\theta}$$

$$< \sqrt{\sigma_e^2 - (\sigma_{20} - \sigma_{10})^2 \sin^2 2\theta} \quad (3.2.46.)$$

(d'après 3.2.3.)

L'égalité (3.2.45.) devient donc :

$$p_o(\theta) = \frac{1}{\alpha_{21}} \left[\sqrt{\sigma_e^2 - (\sigma_{20} - \sigma_{10})^2 \sin^2 2\theta} - (\sigma_{20} - \sigma_{10}) \cos 2\theta \right] \quad (3.2.47.)$$

Dans ce cas, d'après la première inégalité de (3.2.44.), il faut :

$$(\sigma_{20} - \sigma_{10}) \cos 2\theta \geq \frac{\beta_{21} - \alpha_{21}}{2\alpha_{21}} \left[\sqrt{\sigma_e^2 - (\sigma_{20} - \sigma_{10})^2 \sin^2 2\theta} - (\sigma_{20} - \sigma_{10}) \cos 2\theta \right]$$

quel que soit le signe de $\beta_{21} - \alpha_{21}$, cette inégalité devient après simplifications :

$$\cos 2\theta \geq \frac{\beta_{21} - \alpha_{21}}{2\sqrt{(\beta_{21} \cdot \alpha_{21})}} \cdot \frac{\sqrt{(\sigma_e^2 - (\sigma_{20} - \sigma_{10})^2 \sin^2 2\theta)}}{\sigma_{20} - \sigma_{10}} \quad (3.2.48.)$$

En considérant la seconde ligne de (3.2.44.), nous trouvons de la même manière :

$$p_o(\theta) = \frac{1}{\beta_{21}} \left[\sqrt{\sigma_e^2 - (\sigma_{20} - \sigma_{10})^2 \sin^2 2\theta} + (\sigma_{20} - \sigma_{10}) \cos 2\theta \right] \quad (3.2.49.)$$

avec

$$\cos 2\theta < \frac{\beta_{21} - \alpha_{21}}{2\sqrt{\beta_{21} \cdot \alpha_{21}}} \cdot \frac{\sqrt{\sigma_e^2 - (\sigma_{20} - \sigma_{10})^2 \sin^2 2\theta}}{\sigma_{20} - \sigma_{10}} \quad (3.2.50.)$$

Nous obtenons alors les résultats suivants :

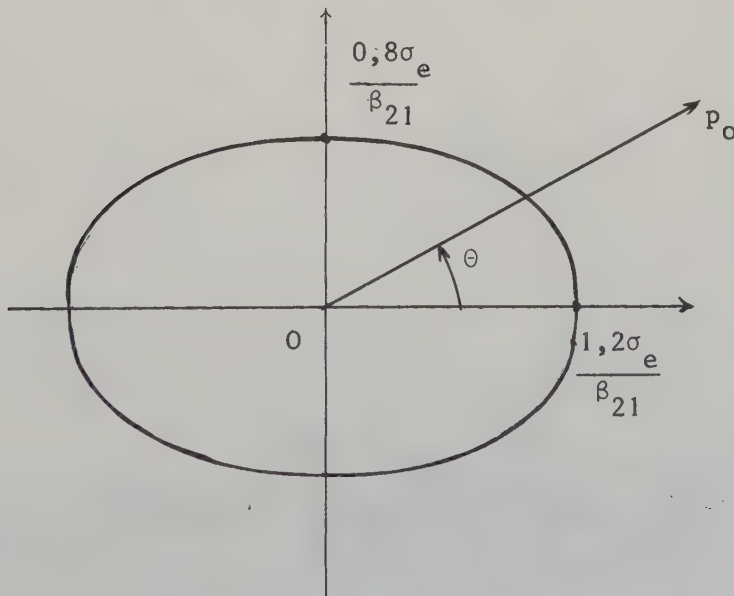
$$\left. \begin{aligned} \text{1er cas : } 0 \leq \sigma_{20} - \sigma_{10} &< \frac{|\beta_{21} - \alpha_{21}|}{\beta_{21} + \alpha_{21}} \sigma_e \\ \text{d'où } \frac{\beta_{21} - \alpha_{21}}{2 \sqrt{\beta_{21} \alpha_{21}}} \cdot \frac{\sqrt{\sigma_e^2 - (\sigma_{20} - \sigma_{10})^2}}{\sigma_{20} - \sigma_{10}} &\left| \begin{array}{l} > 1 \text{ si } \beta_{21} > \alpha_{21} \\ < -1 \text{ si } \beta_{21} < \alpha_{21} \end{array} \right. \end{aligned} \right\} (3.2.51.)$$

(3.2.48.) et (3.2.50.) donnent :

$$p_o(\theta) = \frac{1}{\beta_{21}} \left[\sqrt{\sigma_e^2 - (\sigma_{20} - \sigma_{10})^2} \sin^2 2\theta + (\sigma_{20} - \sigma_{10}) \cos 2\theta \right] \text{ si } \beta_{21} > \alpha_{21}$$

$$p_o(\theta) = \frac{1}{\alpha_{21}} \left[\sqrt{\sigma_e^2 - (\sigma_{20} - \sigma_{10})^2} \sin^2 2\theta - (\sigma_{20} - \sigma_{10}) \cos 2\theta \right] \text{ si } \beta_{21} < \alpha_{21}$$

On montre alors facilement que pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ la fonction $p_o(\theta)$ est monotone. Le graphe en coordonnées polaires de $p_o = p_o(\theta)$ a la forme de celui de la figure 18.



$$\alpha_{21} = 0,08$$

$$\beta_{21} = 0,18$$

- Figure 18 -

$$\sigma_{20} - \sigma_{10} = 0,2 \sigma_e$$

2ème cas : $\sigma_e > \sigma_{20} - \sigma_{10} \geq \frac{|\beta_{21} - \alpha_{21}|}{\beta_{21} + \alpha_{21}} \sigma_e$

Posons

$$\theta_1 \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ tel que } \cos 2 \theta_1 = \frac{\beta_{21} - \alpha_{21}}{2\sqrt{\beta_{21} \alpha_{21}}} \cdot \frac{\sqrt{\sigma_e^2 - (\sigma_{20} - \sigma_{10})^2}}{\sigma_{20} - \sigma_{10}} \quad \left. \vphantom{\frac{\beta_{21} - \alpha_{21}}{2\sqrt{\beta_{21} \alpha_{21}}}} \right\} (3.2.52.)$$

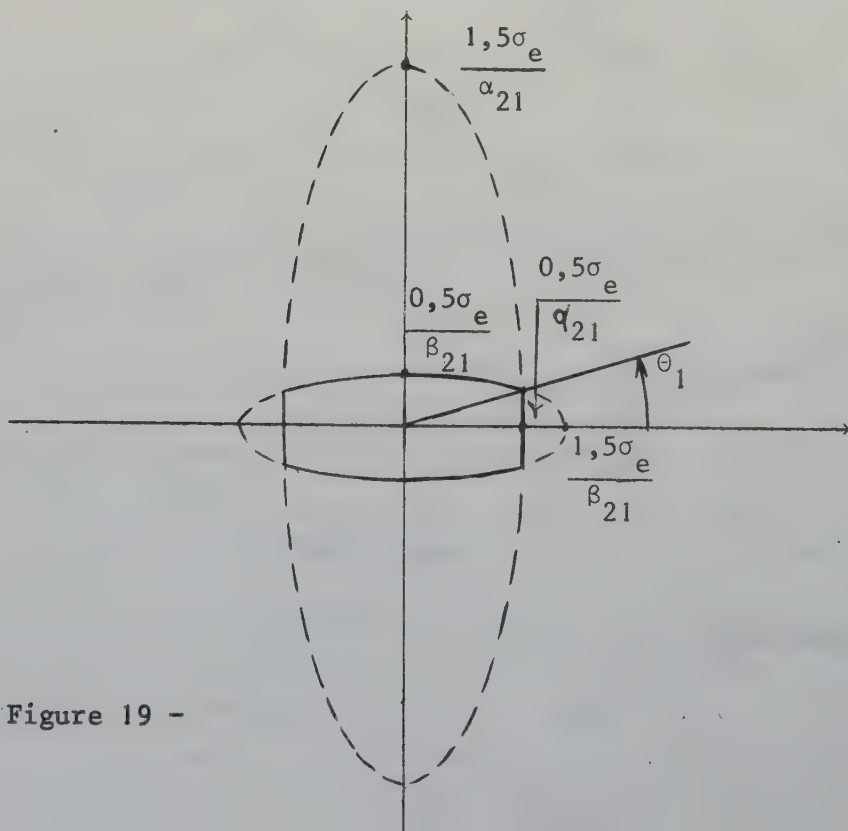
- Si $\theta \in [0, \theta_1] \implies \cos 2 \theta \geq \cos 2 \theta_1$

$$p_o(\theta) = \frac{1}{\alpha_{21}} \left[\sqrt{\sigma_e^2 - (\sigma_{20} - \sigma_{10})^2} \sin^2 2\theta - (\sigma_{20} - \sigma_{10}) \cos 2\theta \right]$$

- Si $\theta \in]\theta_1, \frac{\pi}{2}] \implies \cos 2 \theta < \cos 2 \theta_1$

$$p_o(\theta) = \frac{1}{\beta_{21}} \left[\sqrt{\sigma_e^2 - (\sigma_{20} - \sigma_{10})^2} \sin^2 2\theta + (\sigma_{20} - \sigma_{10}) \cos 2\theta \right]$$

Le graphe en coordonnées polaires de $p_o = p_o(\theta)$ a la forme de celui de la figure 19.



$$\alpha_{21} = 0,08$$

$$\beta_{21} = 0,18$$

$$\sigma_{20} - \sigma_{10} = 0,5 \sigma_e$$

- Figure 19 -

$$\underline{\text{Si } \sigma_{20} \leq \sigma_{10}}$$

D'après (3.2.44.), nous voyons que les résultats seront analogues à ceux trouvés précédemment ; il suffira d'échanger σ_{10} et σ_{20} , et de remplacer θ par $\frac{\pi}{2} + \theta$

Pour $\beta_{21} > \alpha_{21}$, nous obtenons les cas particuliers suivants :

$$\left. \begin{aligned} - \text{ si } \sigma_e > \sigma_{20} - \sigma_{10} \geq \frac{|\beta_{21} - \alpha_{21}|}{\beta_{21} + \alpha_{21}} \sigma_e \\ p_o(0) = \frac{\sigma_e - \sigma_{20} + \sigma_{10}}{\alpha_{21}} ; \quad p_o\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sigma_e - \sigma_{20} + \sigma_{10}}{\beta_{21}} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.53.)$$

$$\left. \begin{aligned} - \text{ si } \frac{|\beta_{21} - \alpha_{21}|}{\beta_{21} + \alpha_{21}} \sigma_e > \sigma_{20} - \sigma_{10} \geq 0 \\ p_o(0) = \frac{\sigma_e + \sigma_{20} - \sigma_{10}}{\beta_{21}} ; \quad p_o\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sigma_e - \sigma_{20} + \sigma_{10}}{\beta_{21}} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.54.)$$

$$\left. \begin{aligned} - \text{ si } 0 > \sigma_{20} - \sigma_{10} \geq - \frac{|\beta_{21} - \alpha_{21}|}{\beta_{21} + \alpha_{21}} \sigma_e \\ p_o(0) = \frac{\sigma_e + \sigma_{20} - \sigma_{10}}{\beta_{21}} ; \quad p_o\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sigma_e - \sigma_{20} + \sigma_{10}}{\beta_{21}} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.55.)$$

$$\left. \begin{aligned} - \text{ si } - \frac{|\beta_{21} - \alpha_{21}|}{\beta_{21} + \alpha_{21}} \sigma_e > \sigma_{20} - \sigma_{10} > - \sigma_e \\ p_o(0) = \frac{\sigma_e + \sigma_{20} - \sigma_{10}}{\beta_{21}} ; \quad p_o\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sigma_e + \sigma_{20} - \sigma_{10}}{\alpha_{21}} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.56.)$$

Pour $\beta_{21} < \alpha_{21}$, nous avons les mêmes résultats sauf pour (3.2.54.) et (3.2.55.) où il faut changer les signes de σ_{20} et σ_{10} et remplacer β_{21} par α_{21}

3.2.3.5. Conclusion sur ce paragraphe :

D'après la fin du paragraphe (3.2.3.2.), le domaine plastique est atteint ($p_o = p_H$) pour la plus petite valeur de p_o qui donne une égalité dans (3.2.32.) ou (3.2.35.). Du paragraphe précédent, nous en concluons donc que pour σ_{10} , σ_{20} et θ fixés, il faut trouver la plus petite des quantités (3.2.41.) et (3.2.51. ou 52.) qui sera donc égale à $p_H(\theta)$.

Pour éviter une discussion générale longue et pénible, nous allons nous placer dans les cas particuliers où les coefficients α_{ij} et β_{21} sont voisins de ceux des figures 11 et 15. Connaissant (3.2.42-43-53 à 56.), il est très facile de vérifier les résultats de la figure 11. On peut aussi, à l'aide de la figure 15, trouver $p_H(\theta)$ pour σ_{10} et σ_{20} donnés. On a ainsi :

$$\left. \begin{array}{l} \text{- pour les domaines (1), (2), et (3)} \\ p_H(\theta) \text{ est donnée par l'expression (3.2.41.)} \end{array} \right\} (3.2.57.)$$

- pour les domaines (4) et (5)

$p_H(\theta)$ est donnée par la plus petite valeur des expressions (3.2.41.)

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{\alpha_{21}} \left[\sqrt{\sigma_e^2 - (\sigma_{20} - \sigma_{10})^2 \sin^2 2\theta} - (\sigma_{20} - \sigma_{10}) \cos 2\theta \right] \\ \text{et } \frac{1}{\beta_{21}} \left[\sqrt{\sigma_e^2 - (\sigma_{20} - \sigma_{10})^2 \sin^2 2\theta} + (\sigma_{20} - \sigma_{10}) \cos 2\theta \right] \end{array} \right\} (3.2.58.)$$

- pour les domaines (6) et (7)

$p_H(\theta)$ est donnée par la plus petite valeur des expressions

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{\alpha_{21}} \left[\sqrt{\sigma_e^2 - (\sigma_{20} - \sigma_{10})^2 \sin^2 2\theta} - (\sigma_{20} - \sigma_{10}) \cos 2\theta \right] \\ \text{et } \frac{1}{\beta_{21}} \left[\sqrt{\sigma_e^2 - (\sigma_{20} - \sigma_{10})^2 \sin^2 2\theta} + (\sigma_{20} - \sigma_{10}) \cos 2\theta \right] \end{array} \right\} (3.2.59.)$$

3.2.4. Applications :

3.2.4.1. Contraintes connues, directions inconnues :

Supposons σ_{10} et σ_{20} connus, est-il possible de déterminer les directions principales ?

D'après le chapitre précédent, nous savons à une rotation des axes près, quelle sera la courbe $p_H = p_H(\theta)$ correspondante. Sur la figure 20 nous avons représenté les différentes courbes possibles. Elles ont été tracées en admettant que la courbe intrinsèque de Mohr-Cauchy est composée de deux droites parallèles. Dans les cas où elle en diffère relativement peu (pour des aciers par exemple), nous admettrons que les courbes correspondant à chacun des domaines, sont proches de celles de la figure 20.

Remarquons en passant que dans les domaines (1), (2) (et donc (3)) les courbes varient régulièrement lorsque θ croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Les axes correspondent aux extremum de la courbe. Par contre dans les domaines (4), (6), (et donc (5), (7)), les maximum de p_H ne sont pas sur les axes.

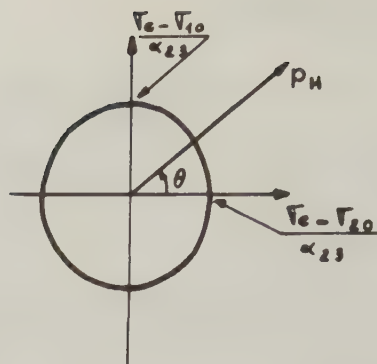
On peut répondre affirmativement à la question posée au début de ce paragraphe. En effet, connaissant σ_{10} et σ_{20} , on sait alors quelle est la courbe correspondante. Quelques valeurs mesurées de p_H doivent donc permettre de positionner cette courbe, et de déterminer ainsi les directions principales des contraintes. Théoriquement, deux valeurs suffisent.

3.2.4.2. Tenseur des contraintes inconnu

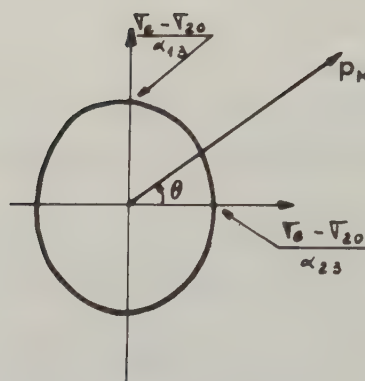
Lorsque rien n'est connu sur l'état de contraintes superficielles, peut-on déterminer les directions principales ainsi que σ_{10} et σ_{20} ?

D'après les courbes de la figure 20, il semble qu'avec 5 ou 6 mesures de p_H (ce qui en fait 10 ou 12 pour la courbe fermée), il est possible de déterminer la courbe précédente avec une précision suffisante. On peut alors en déduire les axes (directions principales) et les quantités $p_H(0)$ et $p_H(\frac{\pi}{2})$. La connaissance d'un diagramme semblable à celui de la figure 15, permet de préciser les valeurs des contraintes. Pour les domaines (1), (4), (5), (6), (7), de ce diagramme, nous pourrions en déduire σ_{10} et σ_{20} , alors que pour (2) et (3), nous ne pourrions trouver que la plus grande des contraintes principales.

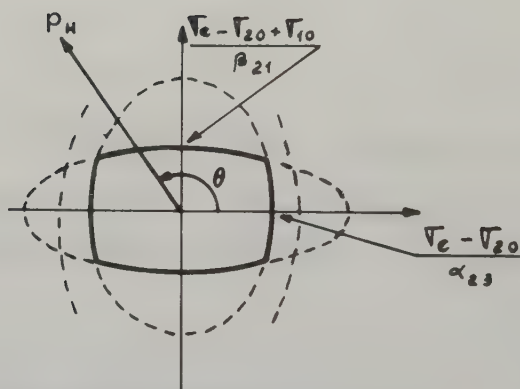
domaine (1):



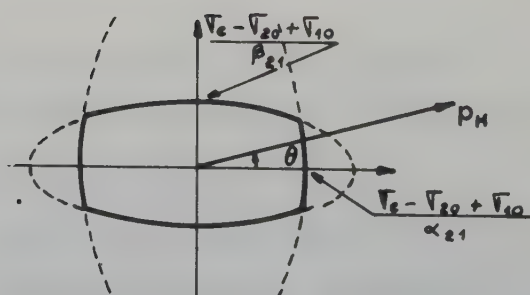
domaine (2):



domaine (4):
pour la plupart des couples
(V_{10}, V_{20})



domaine (6):



Allure des courbes $p_H = p_H(\theta)$ pour $V_{20} \geq V_{10}$

figure 20

3.2.5. Conclusion

D'après ce qui précède et malgré les hypothèses simplificatrices (notamment critère de Tresca), nous pouvons affirmer que l'utilisation d'un pénétrateur elliptique doit permettre d'améliorer la méthode de dureté hertzienne.

D'abord avec un tel pénétrateur, il devient possible de préciser les directions principales des contraintes superficielles. Nous avons montré que la dureté hertzienne passait par un extremum (extrémum relatif dans quelques cas), lorsque les axes de l'ellipse de contact étaient confondus avec ceux des contraintes. Il suffit donc d'établir expérimentalement la courbe $p_H = p_H(\theta)$ pour déterminer les directions principales.

Dans le cas où ces directions sont connues, par la méthode précédente ou par toute autre (symétrie, vernis craquelant, etc...), il est alors possible de trouver la plus grande algébriquement des contraintes principales et quelquefois, la plus petite. Pour cela, il est nécessaire de faire deux mesures de dureté, les axes de l'ellipse de contact étant confondus avec ceux des contraintes (ceci correspond au maximum de sensibilité) ; l'utilisation d'un diagramme semblable à celui de la figure 15 permet alors de préciser ces contraintes.

Notons que dans beaucoup de cas correspondant aux domaines (1) (2) et (3) de la figure 15, les valeurs extrêmes de la dureté hertzienne ne doivent différer entre elles que d'environ 15 % dans les meilleurs cas. Or l'incertitude relative sur ces valeurs peut atteindre facilement 4 à 5 % lorsqu'aucune précaution particulière n'est prise. Pour que le pénétrateur elliptique garde tout son intérêt, il est donc nécessaire de l'utiliser avec des conditions expérimentales très stables : appareils de mesure précis et matériaux homogènes et isotropes.

IV - CONDITIONS EXPERIMENTALES ; ETUDE PROPOSEE

4.1. MACHINE DE DURETE HERTZIENNE :

La machine que nous avons utilisée a été mise au point à la Régie Nationale des Usines Renault par Monsieur C. MORETTI [7]. Elle permet de mesurer les déplacements d'un pénétrateur par rapport à une pièce au moyen d'un capteur capacitif. Voir figures 21 et 22.

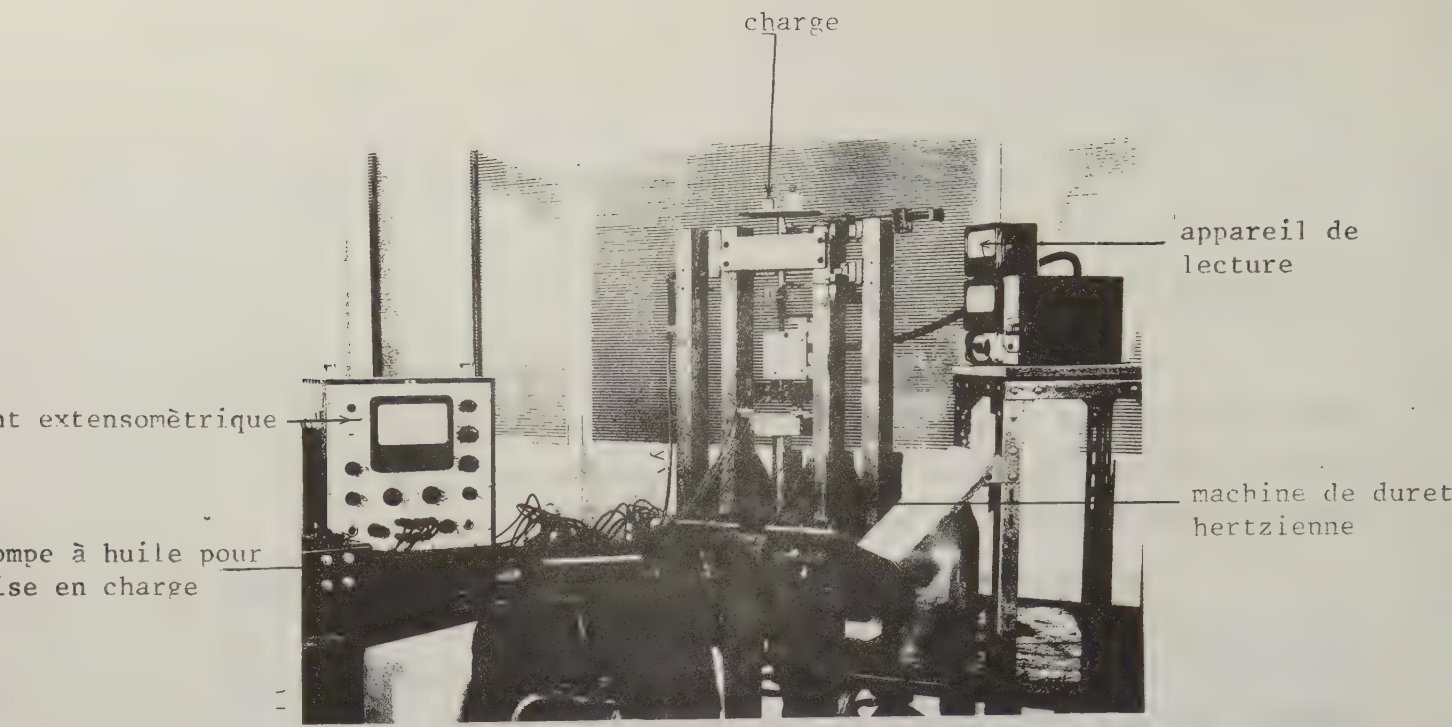
Les lectures sont faites sur le cadran gradué correspondant à la plus grande sensibilité. On peut ainsi mesurer des quantités voisines de 0,02 micron * (μ). De nos expériences, il semble que l'appareil reste linéaire pour des déplacements au moins égaux à 0,5 μ .

4.2. EPROUVETTES :

Dans la plupart de nos essais, nous n'avons utilisé qu'un seul type d'éprouvette, ce qui nous a permis d'avoir des résultats toujours comparables. Il s'agit de plaques carrées de 128 mm de côté, prises toutes dans une même tôle d'acier 25CD4, de 4 mm d'épaisseur, livrée à l'état recuit. Ces plaques sont rectifiées sur chaque face, puis détentionnées (600° C pendant 1 heure), et enfin polies à la main dans la partie centrale (jusqu'au papier 600 pour la plupart).

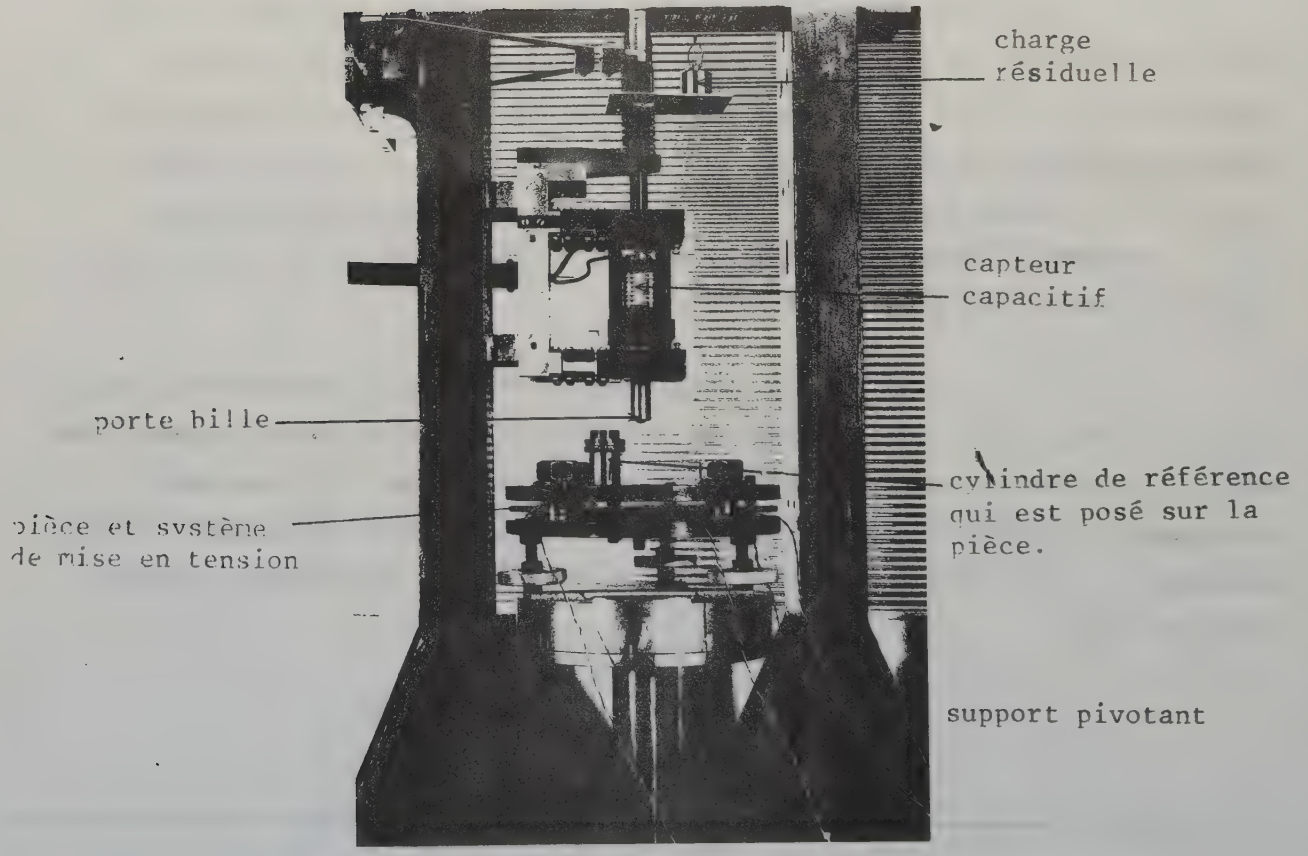
Pour trouver les caractéristiques mécaniques du matériau, nous avons fait des essais de traction sur 4 éprouvettes prises parallèlement aux bords de la même tôle (2 dans chaque direction) et ayant subi les mêmes traitements thermiques que les plaques. Nous avons trouvé des valeurs assez voisines et nous n'avons pu définir avec certitude une anisotropie particulière du métal.

* Ce chiffre est donné par le constructeur du capteur. Nous n'avons pu le vérifier qu'approximativement, du fait de la grande difficulté à créer, avec précision, des déplacements de l'ordre de 0,1 μ .



vue d'ensemble

- figure 21 -



vue partielle

- figure 22 -

Dans la suite, nous prendrons les caractéristiques suivantes :

$$\sigma_e = 57,5 \text{ hbar}$$

(4.2.1.)

$$E = 21,610^3 \text{ hbar}$$

(4.2.2.)

$$\nu = 0,292$$

(4.2.3.)

Pour ces trois quantités, nous considérons que l'erreur relative est de 2 %.

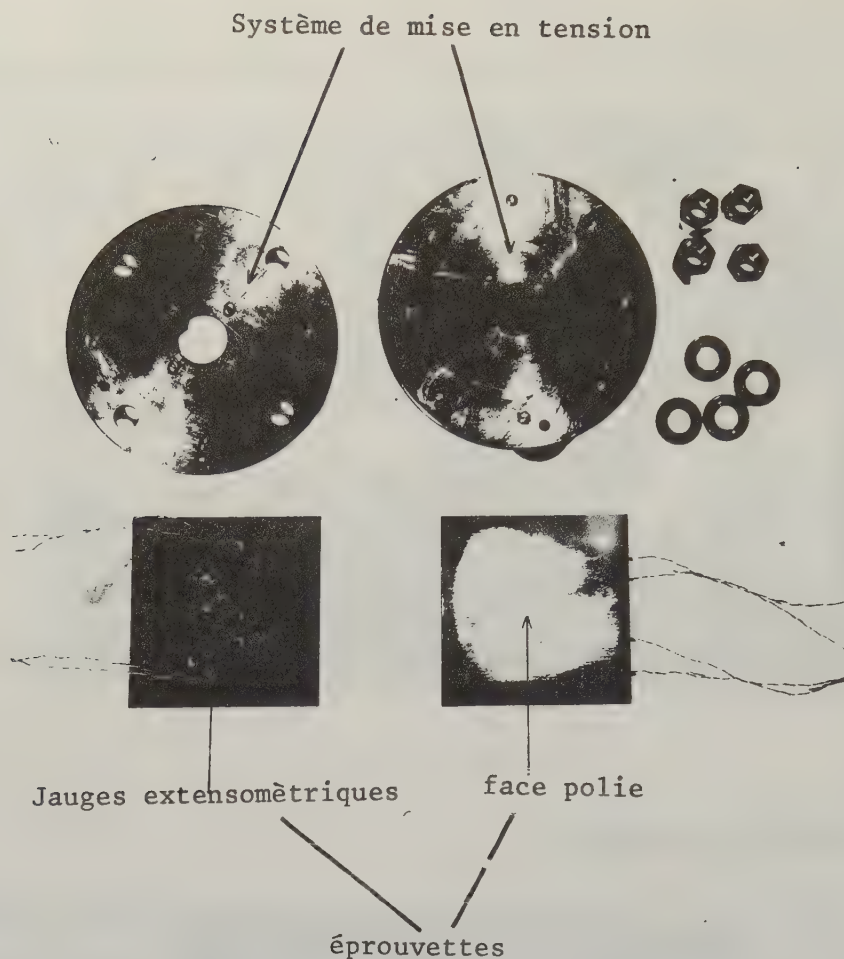
4.3. MISE EN TENSION DES PLAQUES :

Afin de créer à volonté des contraintes sur la face polie des plaques, nous déformions celles-ci en flexion suivant les diagonales. Les déformations étaient repérées par quatre jauges extensométriques placées symétriquement suivant les diagonales de l'autre face. Voir figure 23. Nous nous sommes arrangés pour que les déformations enregistrées par les deux jauges placées sur une même diagonale soient les mêmes. Dans ce cas les directions principales des contraintes créées dans la zone centrale de la face polie, étaient parallèles aux diagonales.

Appelons Oy_1 et Oy_2 les diagonales de la plaque.

σ_{10} et σ_{20} seront les contraintes que nous voulons créer sur la face polie.

e'_1 et e'_2 seront les déformations enregistrées par les jauges placées suivant les diagonales Oy_1 et Oy_2 .



- Figure 23 -

Posons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma'_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} (e'_1 + \nu e'_2) \\ \sigma'_2 = \frac{E}{1 - \nu^2} (e'_2 + \nu e'_1) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4.3.1.) \\ (4.3.2.) \end{array}$$

En mettant une jauge extensométrique au centre de la face polie, nous avons pu étalonner notre système. Voir figure 24.

En réalité, les quantités σ_{10} et σ_{20} créées sont des valeurs moyennes sur la zone centrale de la pièce (cercle de 1 cm de diamètre environ). Compte-tenu des erreurs au pont extensométrique, nous supposons que l'erreur relative sur σ_{10} et σ_{20} , pour dix essais répartis sur la zone considérée, est de 2 %.

Enfin pour vérifier (4.2.1.) nous avons créé sur une plaque de fortes contraintes de tension σ_{10} et σ_{20} égales. Par interpolation, nous

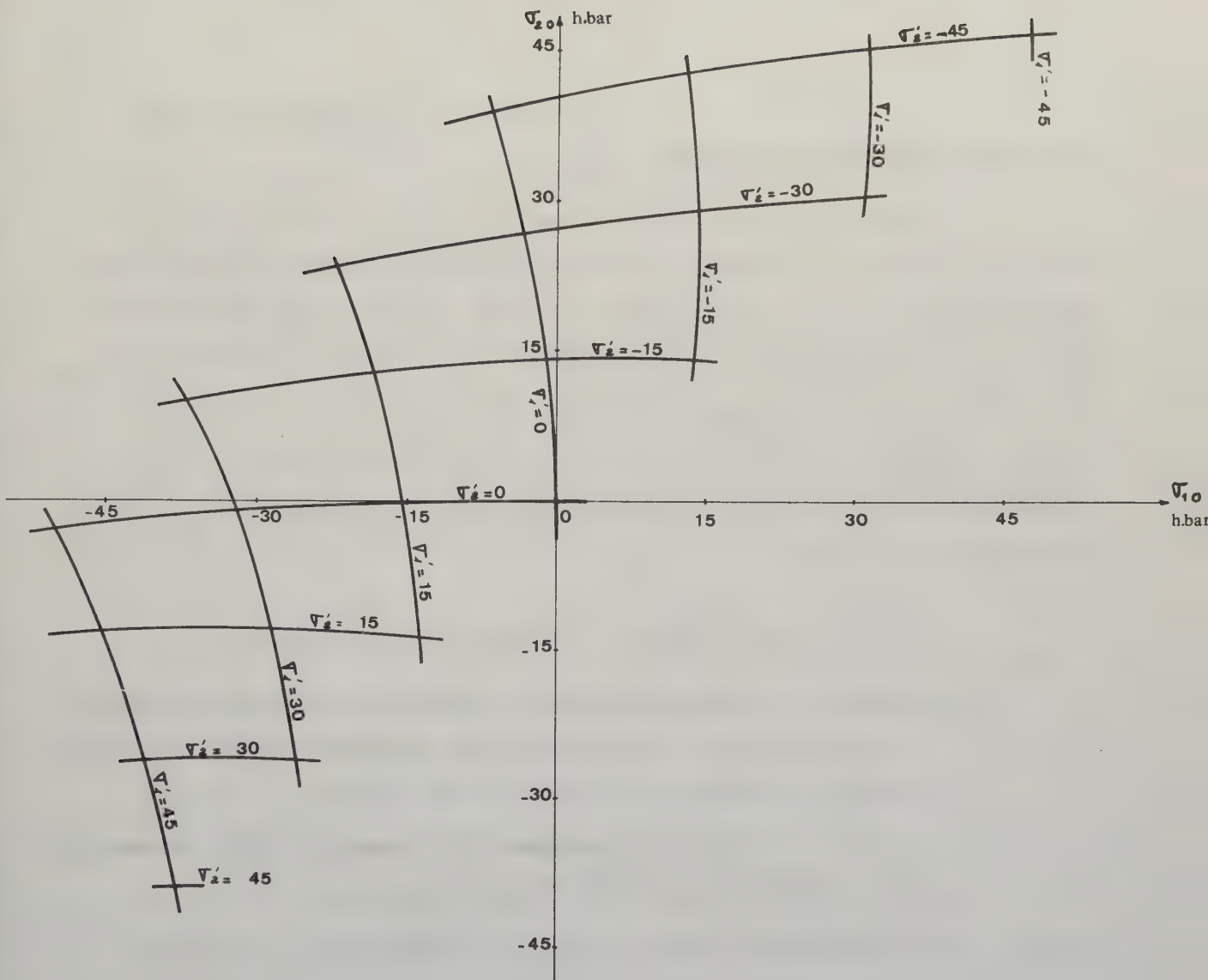


figure 24

avons trouvé que le passage du domaine élastique au domaine plastique se faisait pour :

$$\sigma_{10} = \sigma_{20} = 54 \text{ hbar}$$

Bien qu'étant un peu faible, cette valeur confirme bien (4.2.1.) si l'on tient compte des conditions différentes de mise en tension des éprouvettes.

4.4. ETUDE EXPERIMENTALE PROPOSEE :

Comme nous l'avons vu, la méthode de dureté hertzienne ne permet pas toujours de déterminer la plus petite des contraintes principales superficielles. D'autre part, lorsque cela est possible, il est à craindre que les erreurs relatives soient très importantes. Nous avons cherché une autre méthode permettant de s'ajouter à celle de la dureté hertzienne. Pour cela nous avons été guidés par l'idée suivante : "la formation du domaine plastique naissant lors de la pénétration d'une bille dure, doit être fonction entre autres de la plus petite en valeur algébrique des contraintes principales".

Nos expériences peuvent se grouper en trois parties :

- étude de la pénétration d'une bille dans une pièce dépourvue de contraintes ; détermination de différents choix (polissage, nombre d'essais, etc...) ;
- étude de la pénétration d'une bille dans une pièce comportant des contraintes superficielles connues ;
- étude sommaire dans le cas d'un pénétrateur elliptique.

V - ETUDE DE LA PENETRATION d'UNE BILLE DANS UNE
PIECE DEPOURVUE DE CONTRAINTES SUPERFICIELLES

5.1. COURBES THEORIQUES ET EXPERIMENTALES

5.1.1. Etude de l'enfoncement résiduel :

5.1.1.1. Avant propos :

Lorsque la bille n'est pas chargée, on vient la mettre en contact avec la pièce. On définit ainsi le zéro des enfoncements. Nous appellerons :

- * $w(0, P)$ l'enfoncement lors du passage de la charge 0 à la charge P .
- * $w(P, 0)$ la remontée lors du passage de la charge P à la charge 0.

$w(P, 0)$ et $w(0, P) - w(P, 0)$ représentent respectivement les enfoncements élastique et résiduel de la bille.

Pratiquement, on est obligé de laisser en permanence une charge P_0 sur la bille pour que celle-ci reste toujours en contact avec la pièce. On obtient alors les déplacements suivants (en valeur arithmétique) :

- * $w(0, P_0)$ passage des charges 0 à P_0 , puis
- * $w(P_0, P)$ passage des charges P_0 à P , puis
- * $w(P, P_0)$ (remontée) passage des charges P à P_0 , et enfin
- * $w_P(P_0, 0)$ passage des charges P_0 à 0 après avoir appliqué la charge P .

La machine de dureté hertzienne utilisée donne les mesures de $w(P_0, P)$ et de $w(P_0, P) - w(P, P_0)$. Nous avons les relations :

$$w(P, 0) = w(P, P_0) + w_P(P_0, 0) - w_P(P_0, 0)$$

Lorsque P_0 est petit par rapport au seuil de plasticité, l'expérience montre que nous avons les relations :

$$w(0, P_0) = w(P_0, 0) = w_P(P_0, 0) \quad (\text{approximation de l'ordre de } 0,002 \mu)$$

D'où on peut écrire avec une très bonne précision :

$$w(\mathbf{P}, 0) = w(\mathbf{P}, \mathbf{P}_0) + w(\mathbf{P}_0, 0)$$

$$w(0, \mathbf{P}) - w(\mathbf{P}, 0) = w(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}) - w(\mathbf{P}, \mathbf{P}_0)$$

Pour $\mathbf{P}_0$ fixé, posons $w_e(\mathbf{P}) = + w(\mathbf{P}, \mathbf{P}_0)$ et $w_r(\mathbf{P}) = w(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}) - w(\mathbf{P}, \mathbf{P}_0)$

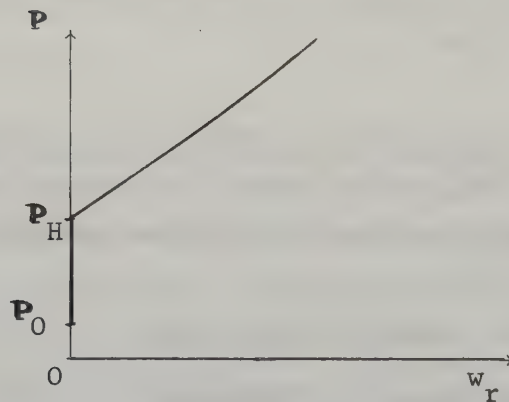
D'après les relations précédentes, $w_e(\mathbf{P})$ représente la différence des enfoncements élastiques obtenus pour les charges $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_0$, tandis que $w_r(\mathbf{P})$ représente l'enfoncement résiduel dû à la charge $(\mathbf{P} - \mathbf{P}_0)$.

5.1.1.2. Courbes théoriques :

Considérons la quantité $w_r(\mathbf{P})$. Théoriquement, on doit avoir :

$$w_r(\mathbf{P}) \begin{cases} = 0 & \text{si } \mathbf{P} \leq \mathbf{P}_H \text{ domaine élastique} \\ = f(\mathbf{P}) & \text{si } \mathbf{P} > \mathbf{P}_H \text{ domaine plastique} \end{cases} \quad (5.1.1.)$$

Voir figure 25.



- Figure 25 -

La dureté hertzienne se calcule alors à partir de $\mathbf{P}_H$ à l'aide de la formule (2.3.5.) :

$$P_H = \frac{1}{\pi} \left[\frac{6}{\epsilon^2} \cdot \frac{P_H}{R_1^2} \right]^{\frac{1}{3}}$$

Nota : Nous admettrons dans toutes nos expériences, que les formules de Hertz sont valables également pour les plaques utilisées. Ceci se justifie par le fait que le contact élastique n'intéresse qu'une zone superficielle peu profonde de la pièce (quelques dixièmes de millimètres).

5.1.1.3. Courbes expérimentales :

Sur la figure 26, nous avons représenté deux courbes expérimentales très significatives.

Dans la plupart de nos expériences, il est apparu que les courbes (w_r, P) ont l'allure de celle de la figure 27 aux erreurs et fluctuations de mesure près. Les enfoncements résiduels ne sont pas nuls dans le domaine élastique. Cela doit être dû principalement à l'état de surface qui ne peut être parfait. Les quantités mesurées sont assez faibles (inférieures à $0,05 \mu$)

Pour le domaine plastique naissant, on constate que la courbe se rapproche beaucoup d'une droite jusqu'à des valeurs de P au moins égales à $4 P_H$, puis elle s'en éloigne en prenant une allure parabolique d'axe $O P$.

Les deux parties se raccordent en général par un petit arc de courbe. Physiquement ceci s'explique par le fait que le seuil de plasticité n'est pas le même pour tous les composants du matériau. Nous appellerons alors P_H l'ordonnée de l'intersection des tangentes.

5.1.1.4. Vérification statistique :

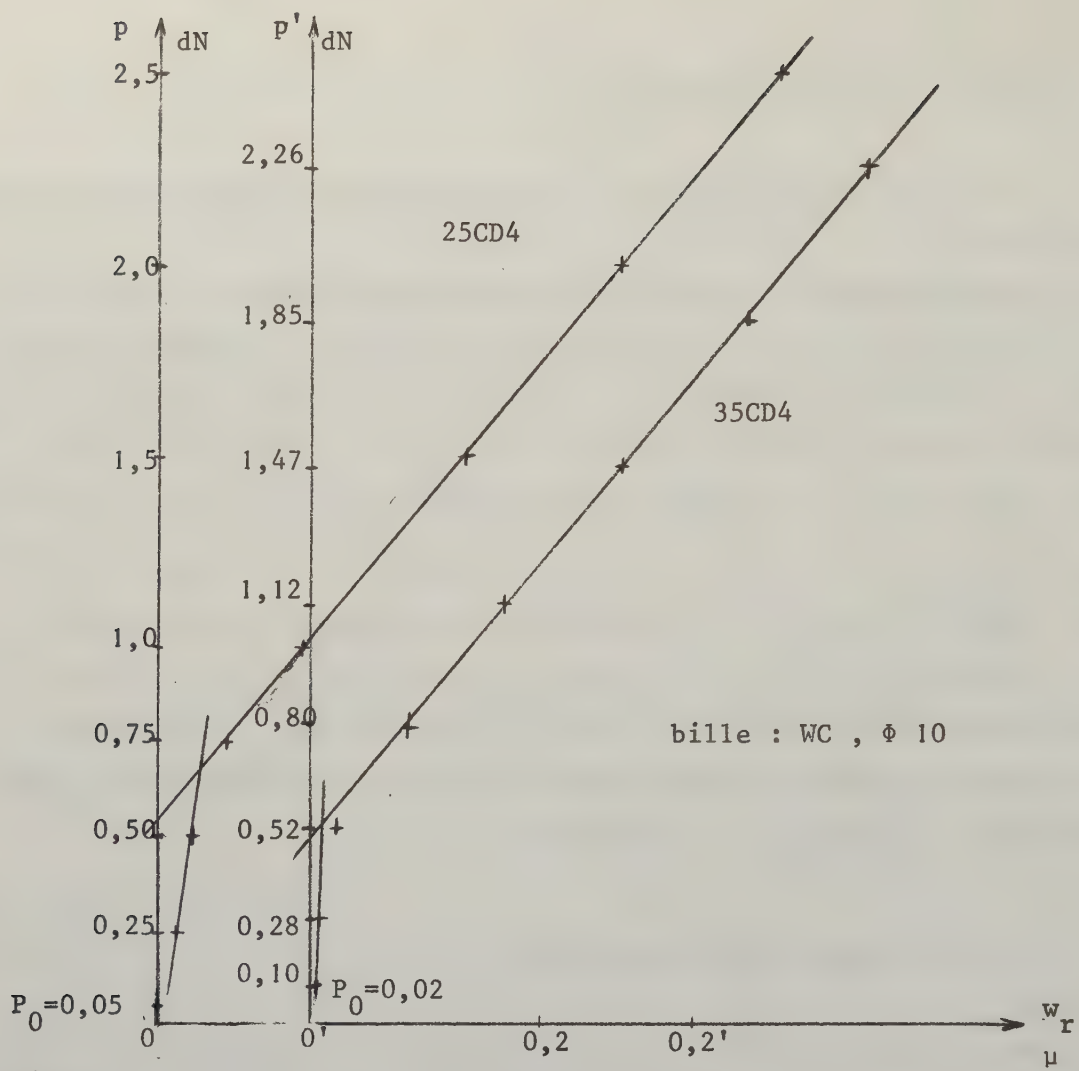
Pour donner une idée de la linéarité dans le domaine plastique, nous avons fait une expérience portant sur 31 essais. Les conditions expérimentales étaient

- pièce : acier X C 100 recuit
- bille : carbure de tungstène, diamètre 10 mm
- charge résiduelle : $P_0 = 0,050 \text{ dN}$
- charges appliquées : 0,250 ; 0,450 ; 0,650 ; 0,850 dN.
- quantités mesurées :

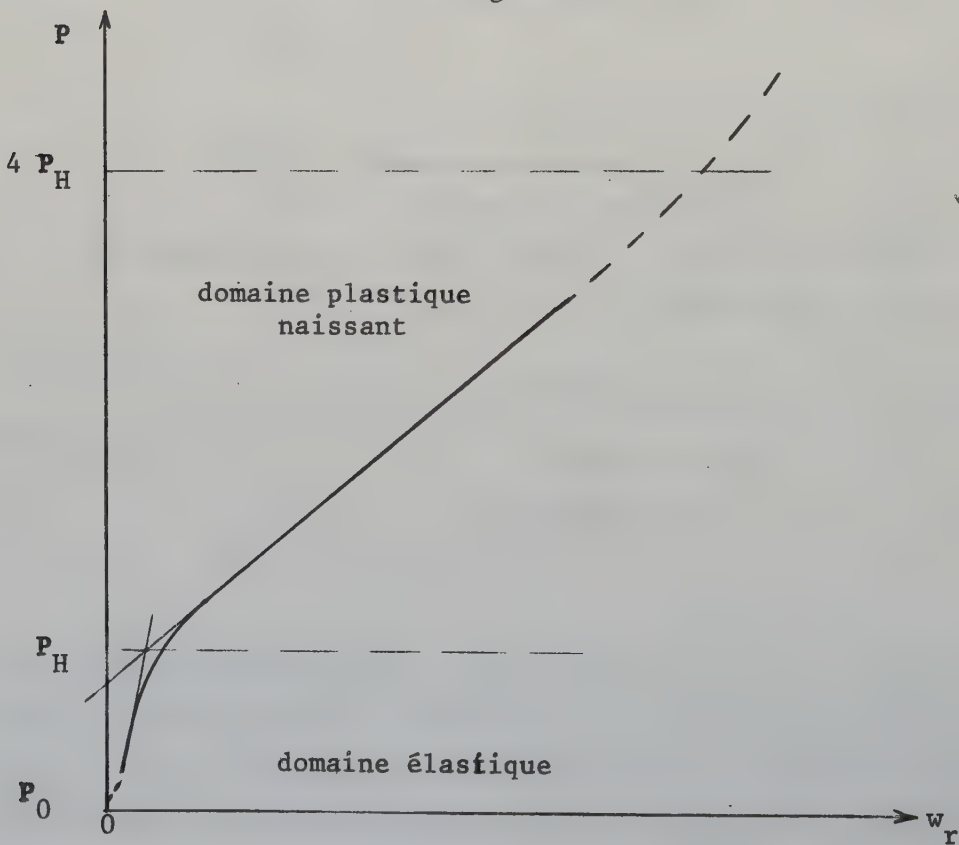
$$X = w_r (0,450)$$

$$Y = w_r (0,650)$$

$$Z = w_r (0,850)$$



- figure 26 -



- figure 27 -

Pour que la courbe (w_r, P) soit une droite dans le domaine plastique, il faudrait :

$$Y - X = Z - Y \quad \text{soit} \quad Y = \frac{1}{2} (X + Z) \quad (5.1.2.)$$

Cherchons le plan de régression de Y en X et Z. Nous savons d'après la statistique que l'équation de ce plan est donnée par :

$$Y - \bar{Y} = a (X - \bar{X}) + b (Z - \bar{Z}) \quad (5.1.3.)$$

où

$$a = \frac{\Sigma (Z_i - \bar{Z})^2 \cdot \Sigma (X_i - \bar{X}) (Y_i - \bar{Y}) - \Sigma (X_i - \bar{X}) (Z_i - \bar{Z}) \cdot \Sigma (Y_i - \bar{Y}) (Z_i - \bar{Z})}{\Sigma (X_i - \bar{X})^2 \cdot \Sigma (Z_i - \bar{Z})^2 - [\Sigma (X_i - \bar{X}) (Z_i - \bar{Z})]^2} \quad (5.1.5.)$$

$$b = \frac{\Sigma (X_i - \bar{X})^2 \cdot \Sigma (Z_i - \bar{Z}) (Y_i - \bar{Y}) - \Sigma (X_i - \bar{X}) (Z_i - \bar{Z}) \cdot \Sigma (Y_i - \bar{Y}) (X_i - \bar{X})}{\Sigma (X_i - \bar{X})^2 \cdot \Sigma (Z_i - \bar{Z})^2 - [\Sigma (X_i - \bar{X}) (Z_i - \bar{Z})]^2} \quad (5.1.6.)$$

avec $\bar{X} = \frac{1}{n} \Sigma X_i$; $\bar{Y} = \frac{1}{n} \Sigma Y_i$; $\bar{Z} = \frac{1}{n} \Sigma Z_i$

Après calcul, nous avons obtenu :

$$\begin{aligned} \bar{X} &= 10,48 \cdot 10^{-2} \mu & \Sigma (X_i - \bar{X})^2 &= 325,00 \cdot 10^{-4} \mu^2 \\ \bar{Y} &= 18,22 \cdot 10^{-2} \mu & \Sigma (Y_i - \bar{Y})^2 &= 516,70 \cdot 10^{-4} \mu^2 \\ \bar{Z} &= 26,18 \cdot 10^{-2} \mu & \Sigma (Z_i - \bar{Z})^2 &= 727,84 \cdot 10^{-4} \mu^2 \\ \Sigma (X_i - \bar{X}) (Y_i - \bar{Y}) &= 397,80 \cdot 10^{-4} \mu^2 \\ \Sigma (X_i - \bar{X}) (Z_i - \bar{Z}) &= 445,24 \cdot 10^{-4} \mu^2 \\ \Sigma (Y_i - \bar{Y}) (Z_i - \bar{Z}) &= 593,36 \cdot 10^{-4} \mu^2 \end{aligned}$$

Soit $a = 0,662$ et $b = 0,411$

L'équation du plan de régression est alors :

$$Y = 0,270 + 0,662 X + 0,411 Z \quad (5.1.7.)$$

Le coefficient de corrélation observé est :

$$R^2 = \frac{\sum_i [a (X_i - \bar{X}) + b (Z_i - \bar{Z})]^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2} \quad (5.1.8.)$$

Après calcul, on trouve :

$$R^2 = 0,981 \quad (5.1.9.)$$

Le plan de régression trouvé donne donc une excellente image de l'ensemble des points (X_i, Y_i, Z_i) . On voit cependant que l'équation de ce plan est assez différente de (5.1.2.). L'indice de conciliation par rapport au plan $Y = \frac{1}{2} (X + Z)$ est :

$$i^2 = 1 - \frac{\sum [Y_i - \frac{1}{2} (X_i + Z_i)]^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2} \quad (5.1.10.)$$

$$\text{d'où} \quad i^2 = 0,979 \quad (5.1.11.)$$

Ce plan donne donc également une très bonne image de l'ensemble des points (X_i, Y_i, Z_i) .

Nous en concluons que les trois points obtenus sur la courbe (w_r, P) pour $P = 0,450$; $0,650$; et $0,850$ ont statistiquement une probabilité faible d'être alignés, car les équations (5.1.2.) et (5.1.7.) sont nettement différentes. Néanmoins, si on les considère comme tels, l'approximation commise est tout à fait acceptable.

5.1.1.5. Conclusion :

Les nombreuses expériences effectuées, ont dans leur majorité, vérifié que la courbe ($w_r, \mathbf{P}$) est linéaire dans le domaine plastique naissant.

A l'intérieur de ce domaine, posons :

$$\Psi = \frac{\Delta w_r}{\Delta \mathbf{P}} \quad (5.1.12.)$$

Cette quantité caractérise donc la pente de la droite que l'on peut ajuster et nous prendrons toujours pour unité : $10^{-2} \mu \text{ N}^{-1}$ ($\mu = 10^{-3} \text{ mm}$)

A chaque essai de dureté, nous associerons les quantités $\mathbf{P}_H$ et Ψ . Comme nous le verrons plus loin, elles seront fonction de contraintes superficielles.

5.1.2. Etude de l'enfoncement élastique :

5.1.2.1. Résultats théoriques et expérimentaux :

D'après le paragraphe (5.1.1.1.) nous avons pour $\mathbf{P}_0$ fixé :

$$w_e(\mathbf{P}) = w(\mathbf{P}, 0) - w(\mathbf{P}_0, 0)$$

$w(\mathbf{P}, 0)$ représente l'enfoncement élastique de la bille dans la pièce. D'après la formule de Hertz (2.3.5.) nous avons donc théoriquement :

$$w_e(\mathbf{P}) = \left[\frac{9 \epsilon^2}{16 R_1} \right]^{\frac{1}{3}} \left[\mathbf{P}^{\frac{2}{3}} - \mathbf{P}_0^{\frac{2}{3}} \right] \quad (5.1.13.)$$

ϵ étant défini par (2.2.7.) et R_1 par (2.2.4.)

La courbe ($w_e, \mathbf{P}^{\frac{2}{3}}$) doit donc être une droite dans le domaine élastique, et l'expérience le confirme bien. Sur la figure 28, nous avons représenté deux courbes expérimentales.

Nous avons pensé avoir là un autre moyen pour déterminer $\mathbf{P}_H$. En fait, nous avons constaté que la pente de la courbe varie lentement pour $\mathbf{P} \gg \mathbf{P}_H$, si bien que la détermination de $\mathbf{P}_H$ serait très imprécise. Nous sommes arrivés à la même conclusion en considérant la courbe d'enfoncement total :

$$w_t(\mathbf{P}) = w_e(\mathbf{P}) + w_r(\mathbf{P})$$

Dans le domaine élastique, on pose :

$$\Phi = \frac{\Delta w e}{\Delta P \frac{2}{3}} \quad (5.1.14.)$$

D'après (5.1.13.), on doit donc avoir :

$$\Phi = \left[\frac{9 \epsilon^2}{16 R_1} \right] \frac{1}{3} \quad (5.1.15.)$$

Nous prendrons toujours pour unité : $\mu (dN)^{-\frac{2}{3}}$. Ce coefficient donne des renseignements sur les caractéristiques élastiques de la bille et de la pièce.

A chaque essai de dureté nous associerons les trois quantités P_H , Ψ et Φ .

5.1.2.2. Incertitude relative sur une moyenne :

Faisons un rappel statistique au sujet de l'incertitude relative sur une moyenne. Soit X une variable aléatoire normale de moyenne m et considérons (X_i) $i = 1$ à n un échantillon de taille n . Nous avons alors :

$$\text{Prob.} \left[\frac{|\bar{X} - m|}{s_{\bar{X}}} \leq t \right] = F(t)$$

soit

$$\text{Prob.} \left[\frac{|\bar{X} - m|}{|\bar{X}|} \leq \frac{t s_{\bar{X}}}{|\bar{X}|} \right] = F(t) \quad (5.1.16.)$$

avec $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_i X_i$

$$s_{\bar{X}} = \left[\frac{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}{n(n-1)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

t un paramètre positif

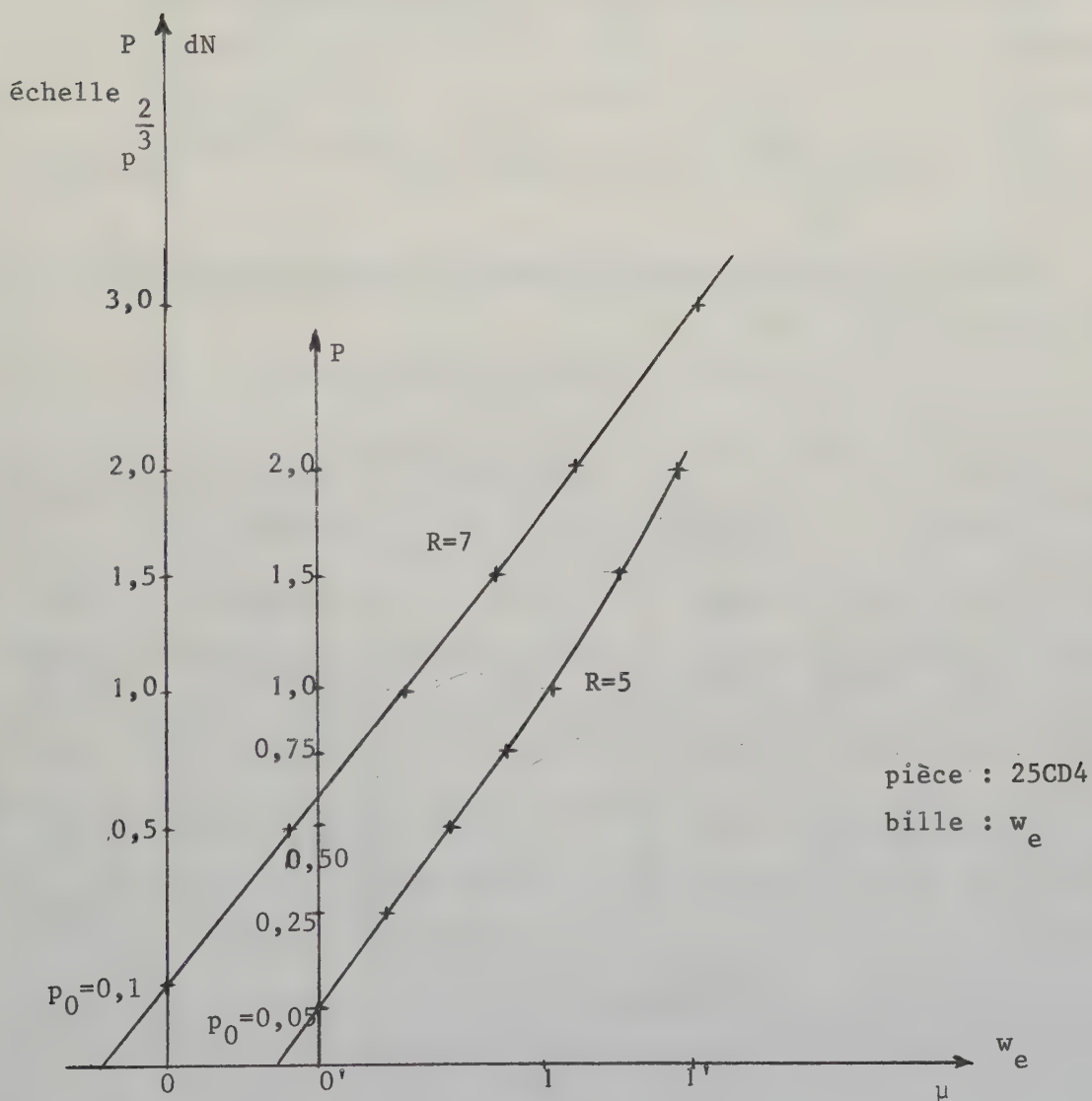
et $F(t)$ une fonction donnée par la loi de Student-Fisher à $(n-1)$ degrés de liberté.

En général m est inconnu ; (5.1.16.) dit donc qu'il y a une probabilité de $F(t)$ pour que $\bar{X}$ approche m avec une erreur relative inférieure à

$$\frac{t s_{\bar{X}}}{|\bar{X}|}$$

En physique, il est courant de prendre $F(t) = 0,95$.

Dans tous nos calculs d'erreur, nous appliquerons le résultat précédent en supposant bien sûr que les quantités qui nous intéressent suivent des lois normales. (ceci étant vrai en première approximation).



- figure 28 -

5.1.2.3. Vérification sur Φ

Afin de vérifier (5.1.15.) nous avons fait des essais avec des billes et des pièces en acier ou en carbure de tungstène.

D'après (4.2.2.) et (4.2.3.) pour les pièces en acier 25 C D 4 recuit, nous avons :

$$\frac{1 - v^2}{E} = 4,23 \cdot 10^{-5} \text{ mm}^2 (\text{dN})^{-1} \quad (5.1.17.)$$

nous supposons que cette valeur est la même pour les billes en acier.

Pour les pièces et les billes en carbure de tungstène (WC) nous prendrons :

$$\frac{1 - v^2}{E} = \frac{1 - 0,0625}{61\,800} = 1,52 \cdot 10^{-5} \text{ mm}^2 (\text{dN})^{-1} \quad (5.1.18.)$$

Nos expériences ont donné le tableau 2, en prenant des billes de diamètre 10 mm et $F(t) = 0,95$:

bille	pièce	nombre d'essais	t	$\frac{\bar{\Phi}}{\mu (\text{dN})^{\frac{2}{3}}}$	incertitude sur $\bar{\Phi}$ %	valeurs extrêmes.	Φ théorique
W C	W C	14	2,160	0,4583	9,1	0,416-0,500	0,470
	acier	10	2,262	0,7610	2,2	0,743-0,778	0,719
acier	W C	10	2,262	0,7324	4,1	0,702-0,763	0,719
	acier	10	2,262	0,9960	1,1	0,985-1,007	0,931

- Tableau 2 -

Nous constatons dans l'ensemble une bonne concordance entre les valeurs expérimentales de Φ et les valeurs théoriques. Les différences observées ont au moins deux causes :

- les caractéristiques mécaniques des aciers (billes et pièces) et surtout celles du carbure de tungstène sont connues avec une mauvaise précision (on remarque d'ailleurs que la dispersion des résultats est plus importante pour la pièce en carbure).
- l'appareil qui mesure les déplacements de la bille n'est sans doute pas exact. Chaque division ne doit pas correspondre à $0,02 \mu$ exactement. En multipliant les résultats expérimentaux par 0,945 on trouve alors une concordance parfaite avec les résultats théoriques. Dans la suite ce défaut ne nous gênera pas, car nous ne ferons en général que des comparaisons entre les résultats.

5.2. VARIATIONS DE P_H , Ψ ET Φ POUR DIFFERENTS POINTS :

5.2.1. Conditions expérimentales et résultats :

Nous avons voulu voir ce qui se passait pour P_H , Ψ et Φ , lorsqu'on répétait un grand nombre de fois un essai dans une zone restreinte de la pièce (cercle de 1 cm de diamètre environ).

La pièce était en acier 25 C D 4 polie au papier 600, et le pénétrateur était une bille en carbure de tungstène de 10 mm de diamètre. Nous avions $P_0 = 0,050$ dN et nous avons fait 50 essais.

Après dépouillement, nous avons obtenu les tableaux 3 et 4

n nombre d'essais	4	7	10	15	20	30	40	50
$\bar{P}_H$ dN	0,823	0,834	0,862	0,873	0,875	0,877	0,886	0,881
incertitude %	7,7	4,7	4,9	3,5	2,8	2,6	2,4	2,2
$\bar{\Psi}$ $10^{-2} \mu N^{-1}$	1,452	1,453	1,493	1,495	1,493	1,475	1,472	1,468
incertitude %	6,5	4,6	4,9	3,5	2,8	2,0	1,7	1,4
$\bar{\Phi}$ $\mu(dN)^{-2/3}$	0,707	0,709	0,709	0,710	0,710	0,709	0,709	0,708
incertitude %	2,0	1,6	1,1	1,0	0,8	0,7	0,6	0,5

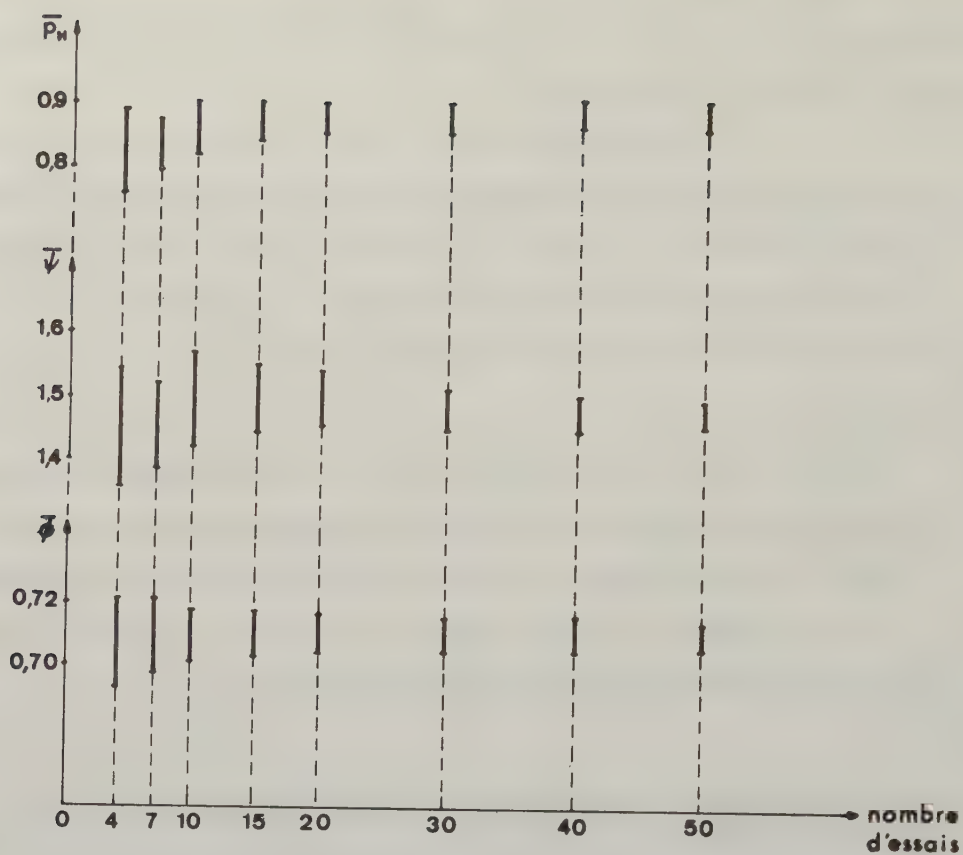


figure 29

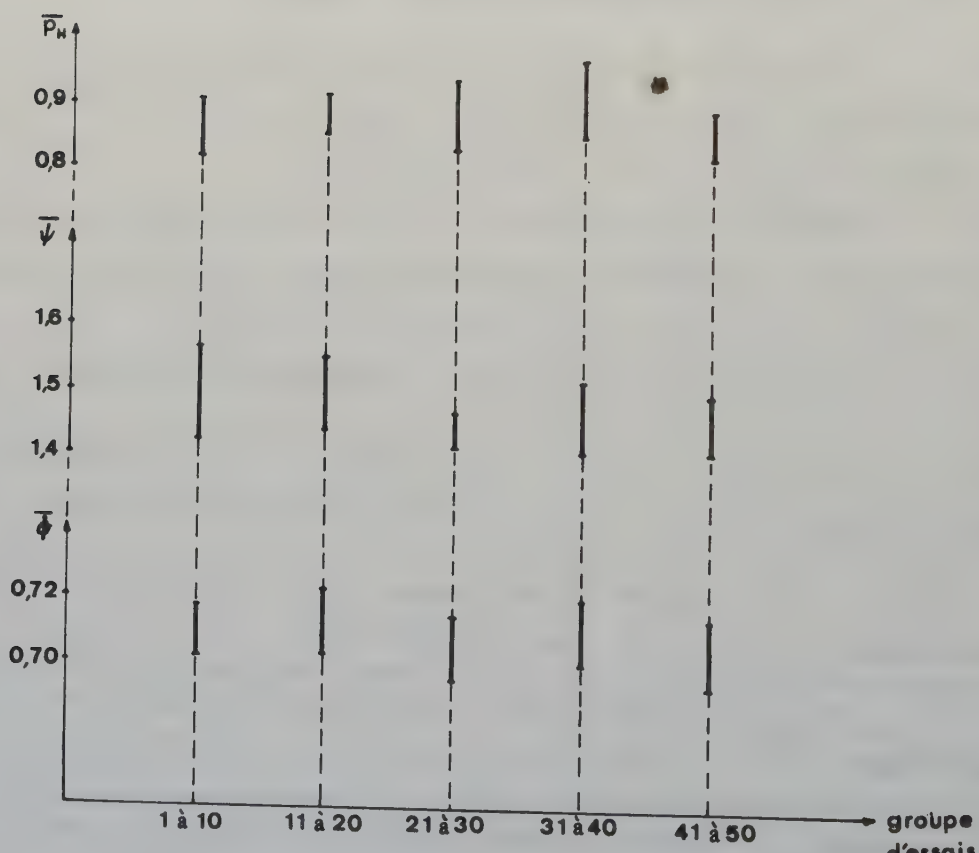


figure 30

n nombre d'essais	1 à 10	11 à 20	21 à 30	31 à 40	41 à 50
$\overline{P}_H$ dN	0,862	0,888	0,881	0,914	0,858
incertitude %	4,9	3,5	6,6	6,3	3,9
$\overline{\Psi}$ $10^{-2} \mu N^{-1}$	1,493	1,494	1,438	1,461	1,454
incertitude %	4,9	3,7	1,9	3,8	3,1
$\overline{\Phi}$ $\mu(dN)^{-\frac{2}{3}}$	0,709	0,712	0,706	0,710	0,704
incertitude %	1,1	1,4	1,2	1,4	1,3

- Tableau 4 -

5.2.2. Interprétation des résultats :

Il n'est pas nécessaire de faire une étude statistique pour pouvoir interpréter les résultats du tableau 4. Compte tenu des erreurs relatives, il est clair d'après la figure 30, que les quantités $\overline{P}_H$, $\overline{\Psi}$ et $\overline{\Phi}$ trouvées pour chaque groupe, ne sont pas significativement différentes. D'après ce tableau, nous ne voyons pas non plus une tendance générale nette, pour les variations de l'erreur relative.

Dans l'expérience précédente, malgré le fait que les essais ont été faits sur une surface petite (inférieure à 1 cm^2) et que la position de la bille n'a pas été changée, nous n'avons pas trouvé de variations sensibles entre les différents résultats. Nous en concluons d'abord que les qualités du pénétrateur restent pratiquement inchangées après un grand nombre d'essais (50). D'autre part, nous vérifions que l'empreinte laissée par la mesure de dureté hertzienne affecte une zone extrêmement petite.

Dans la plupart des expériences qui suivent, nous nous sommes limités à des séries de 10 essais sans dépasser un total de 60 essais par éprouvettes. D'après les tableaux 3 et 4, en s'imposant un tel nombre d'essais par série, nous nous limitons donc à une précision de l'ordre de 5 % pour $\overline{P}_H$, 3,5 % pour $\overline{\Psi}$ et 1,3 % pour $\overline{\Phi}$. Remarquons que ce n'est pas $\overline{P}_H$ qui nous intéresse, mais $p_H = k \overline{P}_H^{\frac{1}{3}}$. L'imprécision la plus importante se trouvera donc sur $\overline{\Psi}$ qui caractérise le domaine plastique naissant.

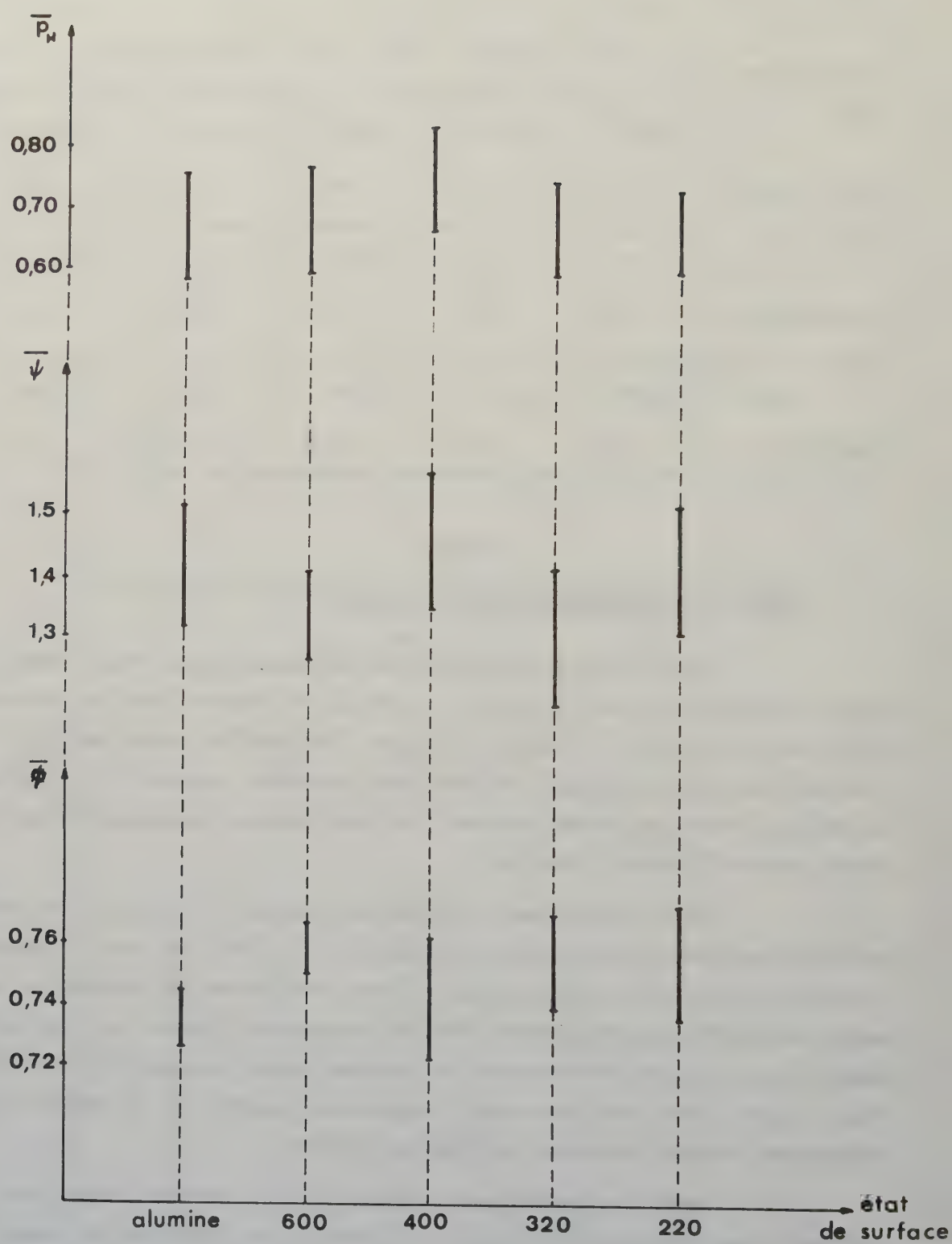


figure 31

5.3. Variations de $\overline{P}_H$, $\overline{\Psi}$, $\overline{\Phi}$ en fonction de l'état de surface :

De nombreux essais ont déjà été faits sur ce sujet, notamment par R. LECLOUX [8] qui n'a pas trouvé de différence notable, pour des mesures de dureté hertzienne effectuées sur une éprouvette rectifiée, et sur la même polie spéculairement. Nous avons repris ces essais afin d'étudier entre autre le comportement de $\overline{\Psi}$ et $\overline{\Phi}$.

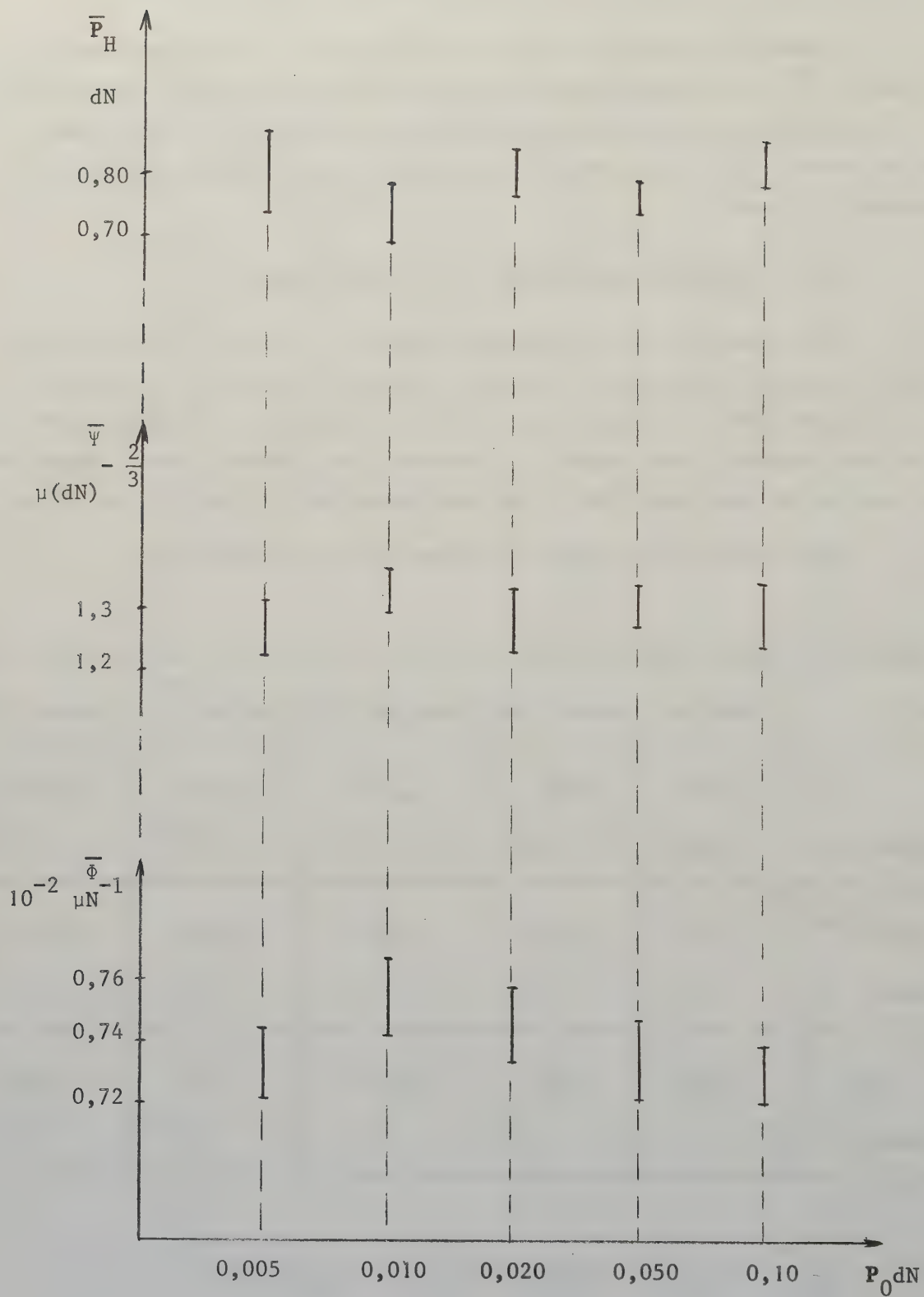
5.3.1. Conditions expérimentales et résultats :

Nous avons pris une éprouvette en acier 25 C D 4, rectifiée, puis détensionnée, que nous avons polie de moins en moins finement. Le pénétrateur était une bille en carbure de tungstène de 10 mm de diamètre, la position de cette bille par rapport à son support ne changeant pas pendant toute l'expérience. La charge résiduelle était de 0,050 dN et nous avons fait 10 essais par série.

Nous avons alors obtenu le tableau 5 et la figure 31.

poli	alumine	papier 600	papier 400	papier 320	papier 220
$\overline{P}_H$ dN	0,670	0,680	0,745	0,662	0,655
incertitude %	12,8	12,4	11,2	11,0	9,5
$\overline{\Psi}$ $10^{-2} \mu N^{-1}$	1,415	1,333	1,456	1,296	1,407
incertitude %	6,7	5,4	7,6	8,5	7,3
$\overline{\Phi}$ $\mu (dN)^{-\frac{2}{3}}$	0,735	0,759	0,742	0,755	0,755
incertitude %	1,2	1,0	2,7	1,9	2,3

- Tableau 5 -



- figure 32 -

5.3.2. Interprétation des résultats :

Il suffit de considérer la figure 31 pour que les conclusions de l'expérience apparaissent nettement. Pour P_H et Ψ les moyennes trouvées ne sont pas significativement différentes. Elles sont voisines respectivement de 0,700 dN et de $1,370 \cdot 10^{-2} \mu N^{-1}$. Les moyennes de Φ sont voisines de $0,744 \mu (dN)^{-\frac{2}{3}}$ malgré la nette différence entre celles qui correspondent au poli alumine et au poli papier 600. En ce qui concerne les dispersions des résultats, il semble que lorsque le poli est moins bon, elles diminuent pour P_H et elles augmentent pour Φ . Ceci n'a d'ailleurs pas été vérifié de façon certaine dans d'autres expériences de même nature.

Nous retrouvons donc les résultats de L. HAUSSEGUY et H. MARTINOD [6] qui ont les premiers constaté l'influence négligeable de l'état de surface. Dans les expériences qui suivent, nous avons toujours poli nos éprouvettes jusqu'au papier 600. La mise en oeuvre était ainsi relativement facile pour des zones polies importantes (au moins 10 cm^2) ; les résultats obtenus ont été très satisfaisants à ce sujet (dispersion faible).

5.4. VARIATIONS DE P_H , Ψ , Φ EN FONCTION DE P_0 :

5.4.1. Conditions expérimentales et résultats :

Nous avons pris les mêmes conditions que dans l'expérience précédente, sauf pour le polissage qui a été fait au papier 600 et pour les charges résiduelles qui ont été : $P_0 = 0,005 ; 0,010 ; 0,020 ; 0,050 ; 0,100 \text{ dN}$.

Après dépouillement, nous avons obtenu les résultats suivants (voir tableau 6 et figure 32):

P_0	0,005	0,010	0,020	0,050	0,100
$\overline{P}_H$ dN	0,800	0,731	0,794	0,749	0,803
incertitude %	7,8	6,0	4,7	2,6	3,8
$\overline{\Psi}$ $10^{-2} \mu N^{-1}$	1,267	1,324	1,274	1,300	1,282
incertitude %	3,4	2,6	4,2	2,6	3,8
$\overline{\Phi}$ $\mu (dN)^{-\frac{2}{3}}$	0,732	0,753	0,745	0,734	0,730
incertitude %	1,5	1,6	1,6	1,7	1,3

- Tableau 6 -

R mm	3	4	5	6	7
P ₀ dN	0,020	0,030	0,050	0,070	0,100
P ₁ dN	0,100	0,150	0,250	0,350	0,500
P ₂ dN	0,200	0,300	0,500	0,700	1,000
P ₃ dN	0,300	0,450	0,750	1,050	1,500
P ₄ dN	0,400	0,600	1,000	1,400	2,000
P ₅ dN	0,600	0,900	1,200	2,100	3,000
P ₆ dN	0,800	1,200	2,000	2,800	4,000
P ₇ dN	1,000	1,500	2,500	3,500	5,000
P ₈ dN	1,200	1,800	3,000	4,200	6,000

- Tableau 7 -

R	3	4	5	6	7
$\bar{P}_H$ dN	0,453	0,586	0,830	1,176	1,638
incertitude %	5,1	12,8	8,4	6,7	6,1
$\bar{\Psi} 10^{-2} \mu N^{-1}$	2,760	1,828	1,625	1,419	1,034
incertitude %	4,5	6,7	2,4	2,2	2,7
$\bar{\Phi} \mu(dN)^{-\frac{2}{3}}$	0,932	0,809	0,737	0,782	0,796
incertitude %	1,5	1,2	1,1	1,3	1,2

- Tableau 8 -

5.4.2. Interprétation des résultats :

D'après le tableau 6, nous constatons que les valeurs de P_H , Ψ et Φ sont indépendantes de P_0 . Ces quantités restent respectivement voisines de :

$$0,775 \text{ dN} ; 1,290 \cdot 10^{-2} \mu\text{N}^{-1} \quad \text{et} \quad 0,740 \cdot \mu(\text{dN})^{-\frac{2}{3}}$$

La précision des résultats semble indépendante de P_0 pour Ψ et Φ tandis qu'elle semble augmenter pour P_H lorsque P_0 croît

Dans la plupart des essais qui suivent, nous avons pris $P_0 = 0,050 \text{ dN}$.

5.5. ETUDE DES VARIATIONS DE P_H , Ψ et Φ EN FONCTION DE R :

5.5.1. Conditions expérimentales et résultats :

Nous avons pris les conditions suivantes :

pièce : acier 25CD4 ; détensionnée, polie papier 600

billes : en W C, avec $R = 3, 4, 5, 6$ et 7 mm

D'après (2.3.5.) nous avons :

$$P_H = \frac{1}{\pi} \left[\frac{6}{\epsilon^2} \frac{P_H}{R_1^2} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (5.5.1.)$$

Dans notre cas $R_1 = R$ rayon de la bille

Pour une pièce homogène p_H est invariant, donc si R_1 est multiplié par k , P_H est multiplié par k^2 . Dans nos différents essais nous avons essayé de suivre cette loi de similitude ; nous avons pris les charges suivantes (voir tableau 7).

Pour chaque bille, nous avons fait dix essais répétés avec 8 charges successives pour chacun. Nous en avons déduit les estimations des quantités P_H , Ψ et Φ ainsi que leurs incertitudes relatives probables à 95 %. Nous avons trouvé le tableau 8.

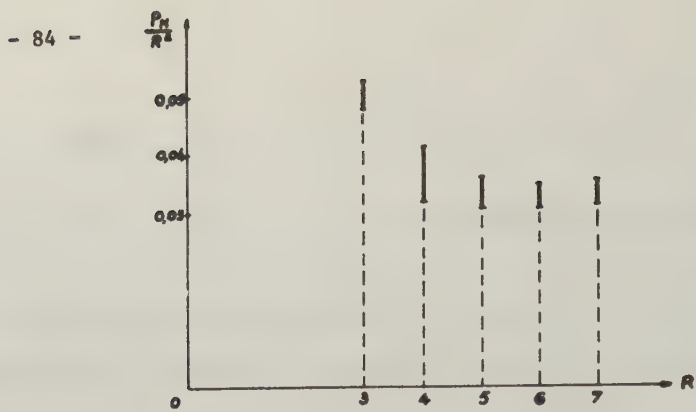


Figure 33

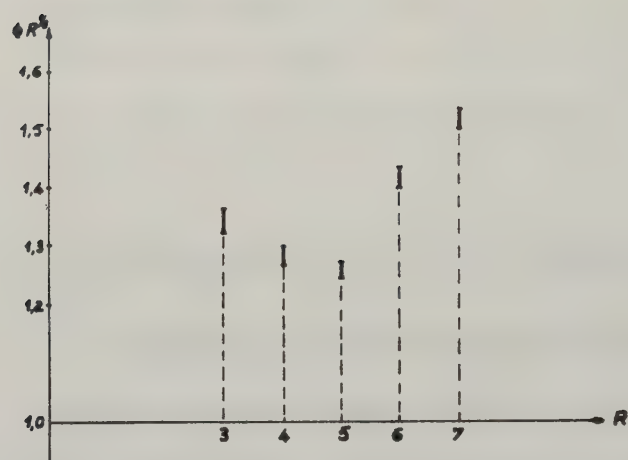


Figure 34

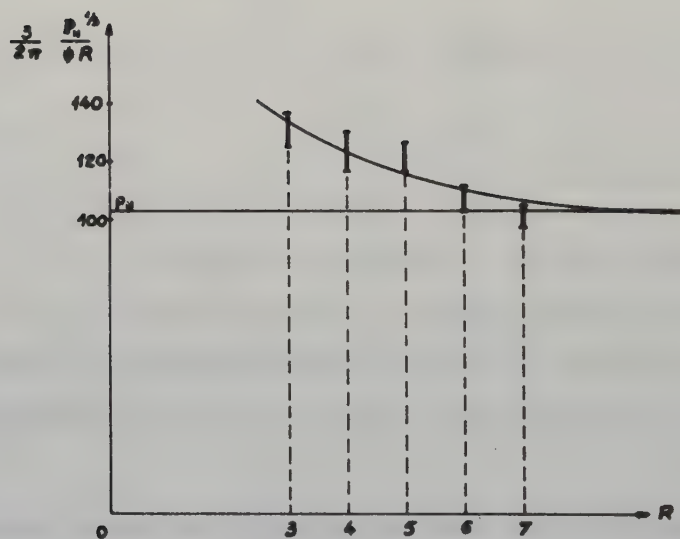


Figure 35

5.5.2. Interprétation des résultats :

5.5.2.1. Pour P_H :

La formule (5.5.1.) s'écrit :

$$P_H = \frac{\pi}{6} P_H^3 \epsilon^2 R_1^2 \quad (5.5.2.)$$

P_H et ϵ étant en principe les mêmes pour chaque bille, $\frac{P_H}{R_1^2}$ doit donc être constant.

R mm	3	4	5	6	7
$\overline{P}_H / R^2$	0,0503	0,0366	0,0332	0,0327	0,334
incertitude absolue	0,0026	0,0047	0,0028	0,0022	0,0021

- Tableau 9 -

Le tableau 9 et la figure 33 ont été trouvés à partir des résultats expérimentaux. Nous constatons que sauf pour $R = 3$, les lois de la similitude s'appliquent très bien pour P_H .

En prenant $\frac{P_H}{R_1^2} = 0,0330$, d'après (5.5.1.), (5.1.17.) et (5.1.18.), nous

trouvons: $P_H = 124,5$ h bar. Le cercle de Mohr tangent à la courbe intrinsèque a pour diamètre: $0,62 P_H = 77$ h bar. Ce cercle est voisin de celui de compression simple (qui doit avoir un diamètre légèrement supérieur à celui de traction simple pour un acier de cette qualité). D'après (4.2.1.), la limite élastique à la traction étant estimée à 57,5 h bar, il semble donc que la valeur de P_H trouvée, est supérieure d'environ 15 % à ce qu'elle devrait être.

La quantité excessive trouvée pour $R = 3$ peut s'expliquer en grande partie par le fait que ϵ n'est pas le même pour chaque bille, et qu'à cause des aspérités, lorsqu'il est petit, R est différent de R_1 .

5.5.2.2. Pour Φ :

D'après (5.1.15.) nous devons avoir :

$$\Phi = \left[\frac{9 \epsilon^2}{16 R_1} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (5.5.3.)$$

si ϵ est le même pour chaque bille, $\Phi R_1^{\frac{1}{3}}$ doit donc être constant. En supposant $R_1 = R$, nous obtenons le tableau 10 et la figure 34.

R_{mm}	3	4	5	6	7
$\bar{\Phi} R^{\frac{1}{3}}$	1,344	1,285	1,260	1,420	1,523
incertitude absolue	0,021	0,016	0,014	0,019	0,019

- Tableau 10 -

Nous constatons que les lois de la similitude s'appliquent mal : les valeurs pour $R = 5$ et $R = 7$ diffèrent d'environ 20 %. Comme dans le chapitre précédent, nous pensons que ces différences sont surtout dues à ϵ et à R_1 .

5.5.2.3. R_1 n'est pas égal à R :

Essayons de faire apparaître le fait que R_1 est différent de R .
(5.5.1.) et (5.5.3.) donnent :

$$P_H = \frac{3}{2 \pi} \frac{P_H^{\frac{1}{3}}}{\Phi R_1} \quad (5.5.4.)$$

D'après le tableau 8 nous avons donc : tableau 11 et figure 35 :

R mm	3	4	5	6	7
$\frac{3}{2\pi} \cdot \frac{P_H^{1/3}}{\Phi R_{hbar}}$	131,2	123,4	121,8	107,5	101,0
incertitude absolue	5,5	6,8	4 8	3,8	3,3

- Tableau 11 -

La figure 35 suggère de prendre $\frac{3}{2\pi} \cdot \frac{P_H^{1/3}}{\Phi R}$: fonction décroissante

de R. Tout se passe donc comme si la quantité R_1 qui intervient dans (5.5.4.) était de la forme $R_1 = R.f(R)$, $f(R)$ étant une fonction décroissante. La détermination de f n'est pas facile. D'après la figure 35, nous pouvons prendre : $f(3) = 1,30$; $f(4) = 1,19$; $f(5) = 1,12$; $f(6) = 1,07$;
 $f(7) = 1,03$ (5.5.6.)

d'où le tableau 12:

R mm	3	4	5	6	7
R_1 mm	3,90	4,76	5,60	6,42	7,21
$\overline{P}_H/R_1^2$	0,0298	0,0259	0,0265	0,0285	0,0315
incertitude absolue	0,0015	0,0033	0,0022	0,0019	0,0020
$\overline{\Phi} R_1^{1/3}$	1,468	1,363	1,310	1,452	1,537
incertitude absolue	0,023	0,017	0,015	0,020	0,019
$\frac{3}{2\pi} \cdot \frac{\overline{P}_H^{1/3}}{\overline{\Phi} R_1}$	101,0	103,7	108,8	100,5	98,1
incertitude absolue	4,2	5,7	4,3	3,6	3,2

- Tableau 12 -

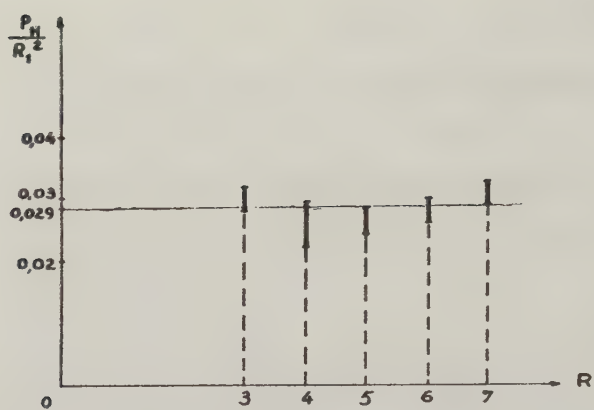


Figure 36

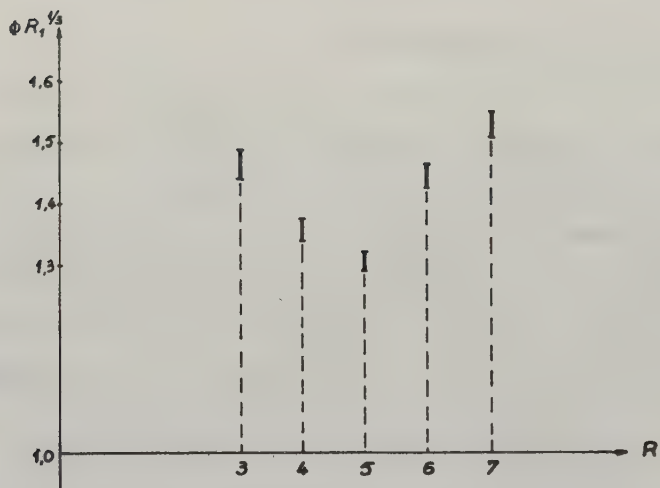


Figure 37

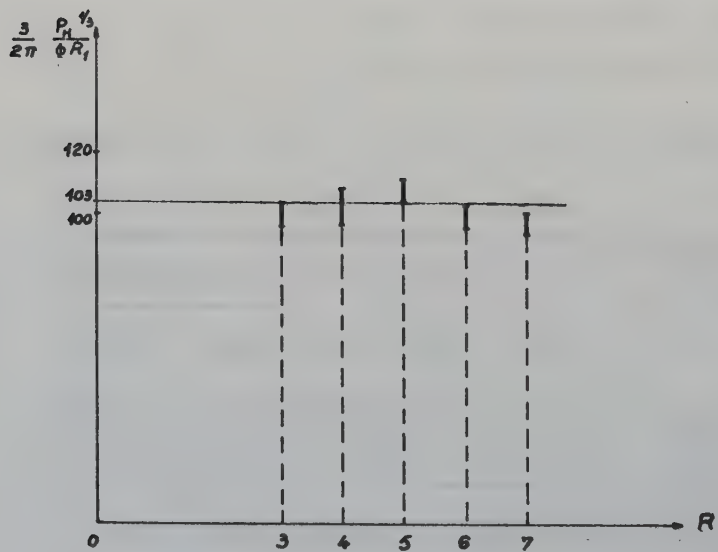


Figure 38

Si l'on tient compte de (5.5.5.), les figures 33,34,35 se transforment respectivement en les figures 36, 37, 38. Il est clair que cette transformation a pour effet d'améliorer la concordance des quantités considérées pour les différents rayons. Les différences qui subsistent sont dues en grande partie à ϵ , aux contraintes résiduelles de polissage et aux fluctuations de mesure.

Du fait des aspérités de la pièce, pour pouvoir appliquer les formules de Hertz, il faudra certainement apporter à R un coefficient correcteur. En considérant l'enfoncement résiduel dû à la charge P_H : $w_r(P_H)$, nous avons trouvé le tableau 13.

R	3	4	5	6	7
$\bar{w}_r(P_H) \cdot 10^{-5} \mu$	5,0	5,2	4,6	5,4	4,4

- Tableau 13 -

Il semble donc en première approximation que $w_r(P_H)$ sont indépendants de R. Plus le rayon de la bille sera grand et plus l'influence des aspérités deviendra négligeable. La fonction $f(R)$ est donc bien décroissante et tend vers 1 quand R tend vers l'infini.

Nous pensons donc avoir trouvé la cause de la mauvaise tenue en similitude des quantités P_H et Φ . Ce fait a déjà été remarqué pour P_H , en particulier par R. LECLoux [8]. Nous avons fait trop peu d'expériences pour pouvoir donner des chiffres précis, les quantités choisies dans (5.5.5.) donnent simplement une idée du phénomène.

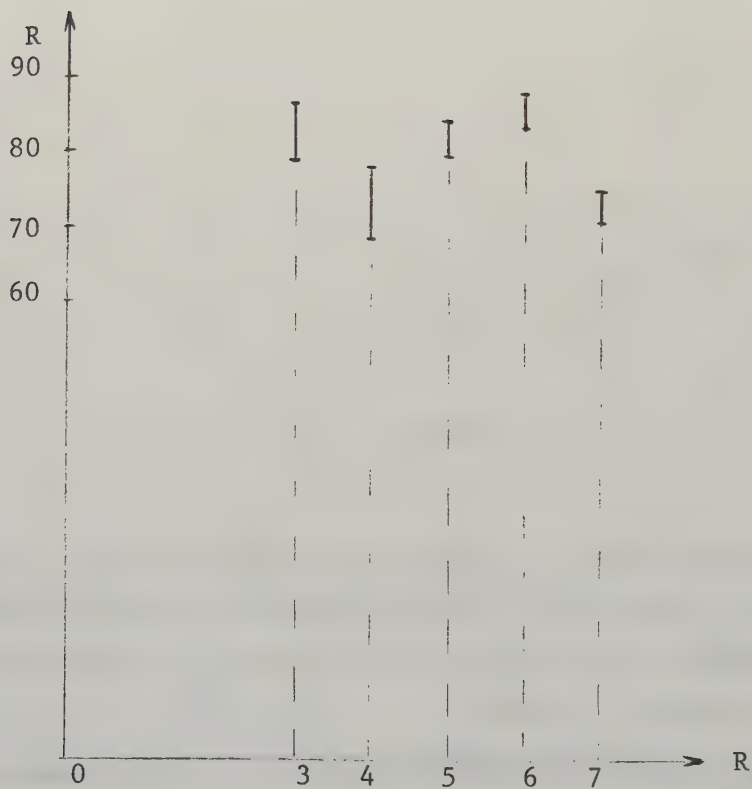
5.5.2.4. Pour Ψ :

D'après les formules de Hertz (2.3.5.), (2.3.6.) et (2.3.4.), il est facile de voir que pour un même p_0 , si R est multiplié par k, il faut que P soit multiplié par k^2 et a et w par k. Dans ce cas, on doit donc avoir Ψ , multiplié par $\frac{k}{k^2} = \frac{1}{k}$. Pour un essai de similitude, on doit avoir

$\Psi \cdot R = \text{constante}$. Voir tableau 14 et figure 39.

R_{mm}	3	4	5	6	7
$\bar{\Psi} \cdot R$	82,8	73,0	81,2	85,1	72,4
incertitude absolue	3,8	4,9	2,0	1,9	2,0

- Tableau 14 -



- Figure 39 -

Cette loi de similitude est à peu près respectée moyennant une certaine dispersion des résultats. Le remplacement de R par R_1 en utilisant (5.5.5.) augmente cette dispersion, ce qui tend à prouver que dans le domaine plastique l'influence de l'état de surface est négligeable dès que l'on arrive dans la "zone linéaire".

5.5.3. Conclusion

De nos expériences et en accord avec celles de R. LECLOUX [8], nous trouvons que les lois de la similitude sont mal respectées. A cela, il y a plusieurs causes. D'abord, l'hétérogénéité due à l'utilisation de plusieurs plaques : le paramètre ϵ et le polissage (qui induit des contraintes résiduelles très superficielles) varient d'une plaque à l'autre. Ensuite, il semble que l'état micro-géométrique joue un rôle non négligeable et modifie les conditions de contact (notamment la quantité R_1).

Dans les expériences qui suivent, nous ferons beaucoup de comparaisons entre les résultats. Nous utiliserons toujours la même bille (W C de diamètre 10) et des pièces ayant subi des traitements identiques, le polissage étant effectué jusqu'au papier 600. En procédant ainsi, toujours de la même façon, nous n'aurons pas à nous préoccuper des quantités inconnues ϵ , $f(R)$, etc...

VI ETUDE DE LA PENETRATION D'UNE BILLE DANS UNE PIECE PRECONTRAINTE

Nous avons fait plusieurs expériences avec différents états de contraintes. Dans ce qui suit, nous n'en rapportons qu'une seule, mais les conclusions que nous tirons ont également été vérifiées pour les autres.

6.1. CONDITIONS EXPERIMENTALES

Nous avons utilisé des éprouvettes et le système de mise en tension décrits dans le chapitre IV. Rappelons que ces éprouvettes sont des plaques d'acier 25 C D 4, rectifiées, détentionnées, puis polies jusqu'au papier 600. Nous avons 6 plaques, découpées dans une même tôle, avec les états de contraintes suivants : voir tableau 15.

	σ_{10} h bar	σ_{20} h bar
plaque N° 1	0	0
	45	45, 30, 15, 0
plaque N° 2	0	0
	30	30, 15, 0, - 15
plaque N° 3	0	0
	15	15, 0, - 15, - 30
plaque N° 4	0	0, - 15, - 30, - 45
plaque N° 5	0	0
	- 15	- 15, - 30, - 45
plaque N° 6	0	0
	- 30	- 30, - 45
	- 45	- 45

- Tableau 15 -

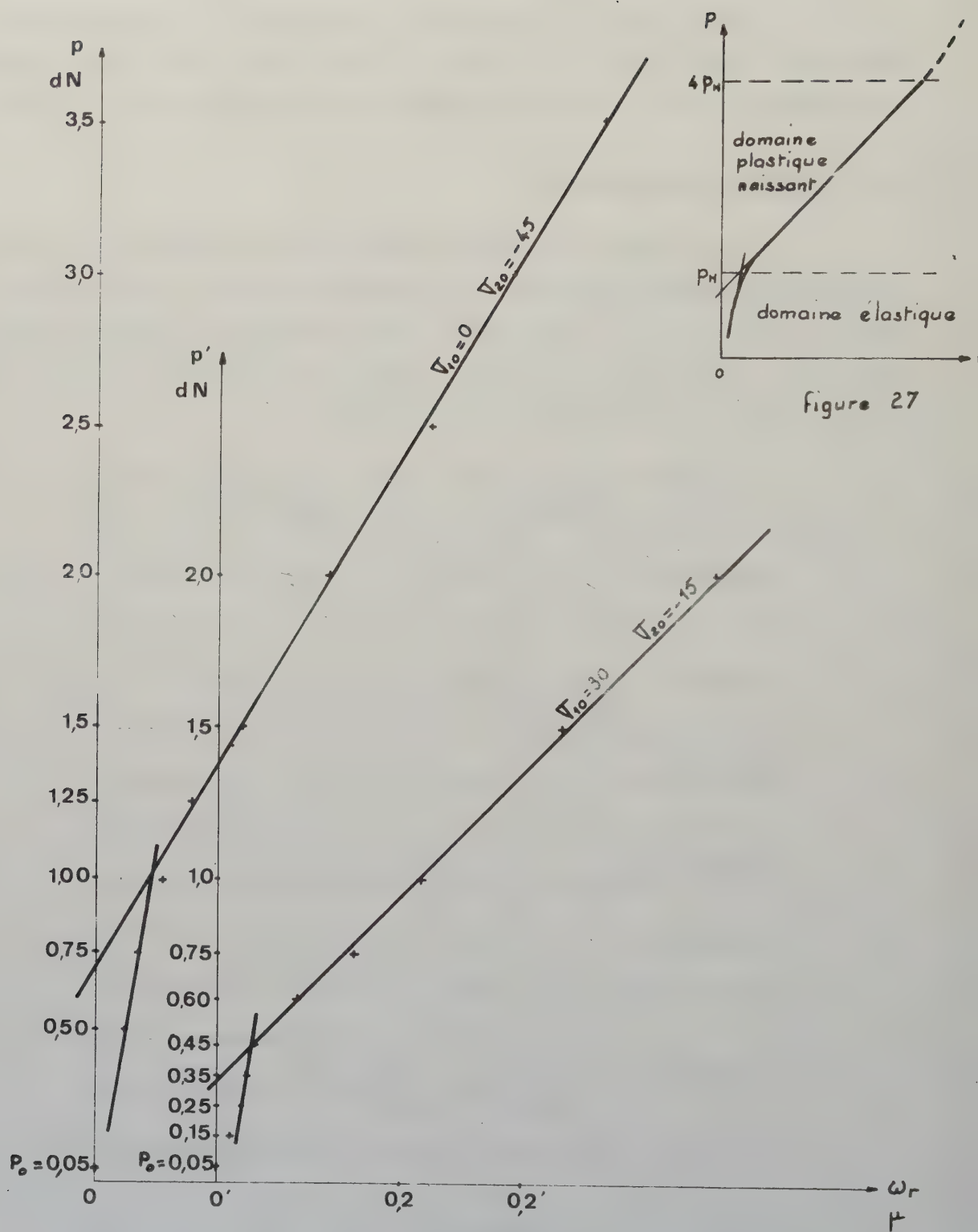


figure 40

Nous avons créé ainsi 22 états de contraintes différents et nous avons fait en plus une série d'essais sur chaque plaque dépourvue de contraintes.

Le pénétrateur était une bille de 10 mm de diamètre, en carbure de tungstène. Pour chaque état de contraintes et pour chaque essai, nous avons pris en moyenne 8 charges différentes, dont deux au moins inférieures à P_H .

Par exemple, nous avons pris :

- pour $\sigma_{10} = 45$, $\sigma_{20} = 15$:

$P_0 = 0,020$, $P_1 = 0,100$, $P_2 = 0,150$, $P_3 = 0,200$, $P_4 = 0,350$, $P_5 = 0,500$

$P_6 = 0,750$, $P_7 = 1,000$, $P_8 = 1,250$, $P_9 = 1,500$

- pour $\sigma_{10} = 0$, $\sigma_{20} = 0$:

$P_0 = 0,050$, $P_1 = 0,250$, $P_2 = 0,500$, $P_3 = 0,750$, $P_4 = 1,000$, $P_5 = 1,500$

$P_6 = 2,000$, $P_7 = 2,500$, $P_8 = 3,000$

Pour chaque état de contrainte, nous avons répété dix fois la mise en charge, (dix essais) et nous avons calculé pour les quantités P_H , Ψ et Φ , la moyenne et son incertitude probable à 95 % (en supposant toujours les distributions normales).

6.2. ETUDE DE L'ENFONCEMENT RESIDUEL :

6.2.1. w_r en fonction de P :

La première question qui se pose est celle de savoir si les courbes (P, w_r) ont l'allure de celle de la figure 27. Sur la figure 40, nous avons tracé deux courbes parmi les 270 courbes trouvées. Dans la plupart des cas, le schéma de la figure 27 reste valable, quel que soient σ_{10} et σ_{20} , nous avons donc pu définir les quantités P_H et Ψ .

Nous étudierons leurs variations dans les chapitres qui suivent.

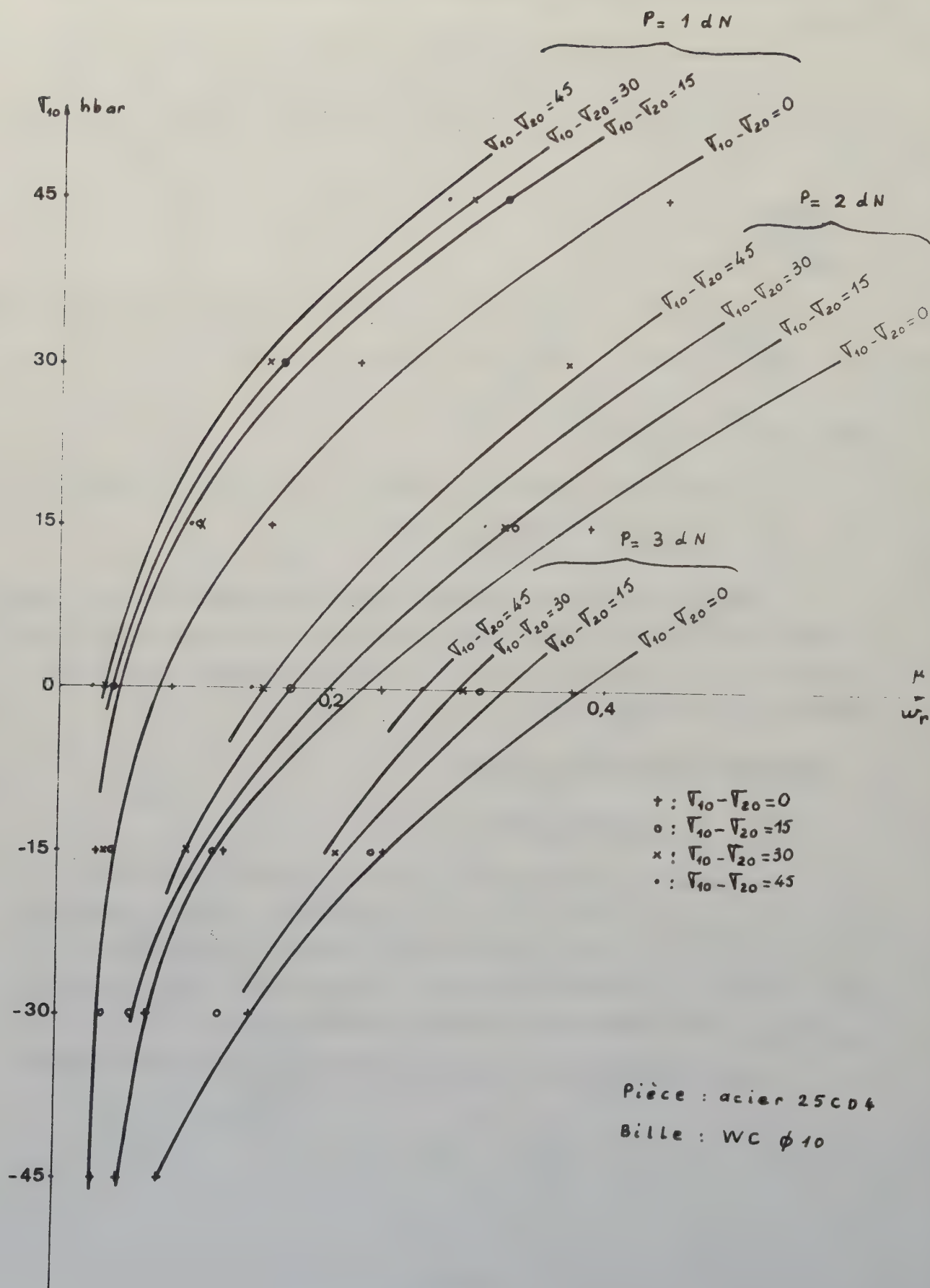


figure 41

6.2.2. w_r en fonction de σ_{10} et σ_{20} :

Pour P fixé, w_r doit dépendre de σ_{10} et σ_{20} . Nous pouvons donc penser que nous avons là un moyen de déterminer σ_{10} et σ_{20} en prenant deux valeurs différentes de P .

Sur la figure 41, nous avons représenté les points $(w_r, \sigma_{10}, \sigma_{10} - \sigma_{20})$ pour trois valeurs de P : 1, 2 et 3 dN. Nous en avons déduit trois faisceaux de courbes.

Comme nous pouvons le voir, la concordance n'est pas bonne. Il y a au moins deux raisons à cela. D'abord tous les essais n'ont pas été effectués sur la même pièce, et ensuite en ne faisant que dix essais par état de contraintes, les erreurs relatives commises sur w_r étaient assez importantes : souvent de l'ordre de 7 à 8 %.

A partir des faisceaux de courbes de la figure 41, il serait facile de mettre au point une méthode permettant de déterminer les contraintes superficielles. Nous y voyons néanmoins deux inconvénients. D'abord l'état de surface jouerait un rôle important. Si on changeait celui-ci, nous pensons que les courbes se déformeraient pour w_r petit, et se translateraient pour w_r grand. Il faudrait donc avoir plusieurs faisceaux de courbes et la correspondance ne serait pas facile à établir. Ensuite, chaque faisceau aurait une utilisation restreinte. Par exemple, figure 41, pour $P = 2$ dN, il ne faudrait pas σ_{10} plus petit que - 15 h bar (w_r serait trop petit ; influence de l'état de surface), ni σ_{10} plus grand que 30 h bar (risque de non linéarité de l'appareil de mesure).

6.3. ETUDE DE L'ENFONCEMENT ELASTIQUE :

Quels que soient σ_{10} et σ_{20} , nous avons remarqué que, comme dans le chapitre (5.1.2.), les courbes $(w_e, \frac{P}{3})$ peuvent être assimilées à des droites pour $P \leq P_H$, avec une très bonne approximation. Sur la figure 42, nous avons représenté deux de ces courbes trouvées au cours de nos expériences. Nous avons remarqué que lors du passage du domaine élastique au domaine plastique, il n'y a pas de discontinuité dans la pente de la courbe ; lorsque P augmente ($P > P_H$) la pente augmente lentement. Nous vérifions donc qu'il n'est pas possible de déterminer P_H avec une bonne précision, en considérant les courbes $(w_e, \frac{P}{3})$.

En conclusion, à chaque essai, nous pouvons donc associer la quantité

$$\phi = \frac{\Delta w_e}{\Delta P \frac{2}{3}} \quad \text{pour} \quad P \leq P_H$$

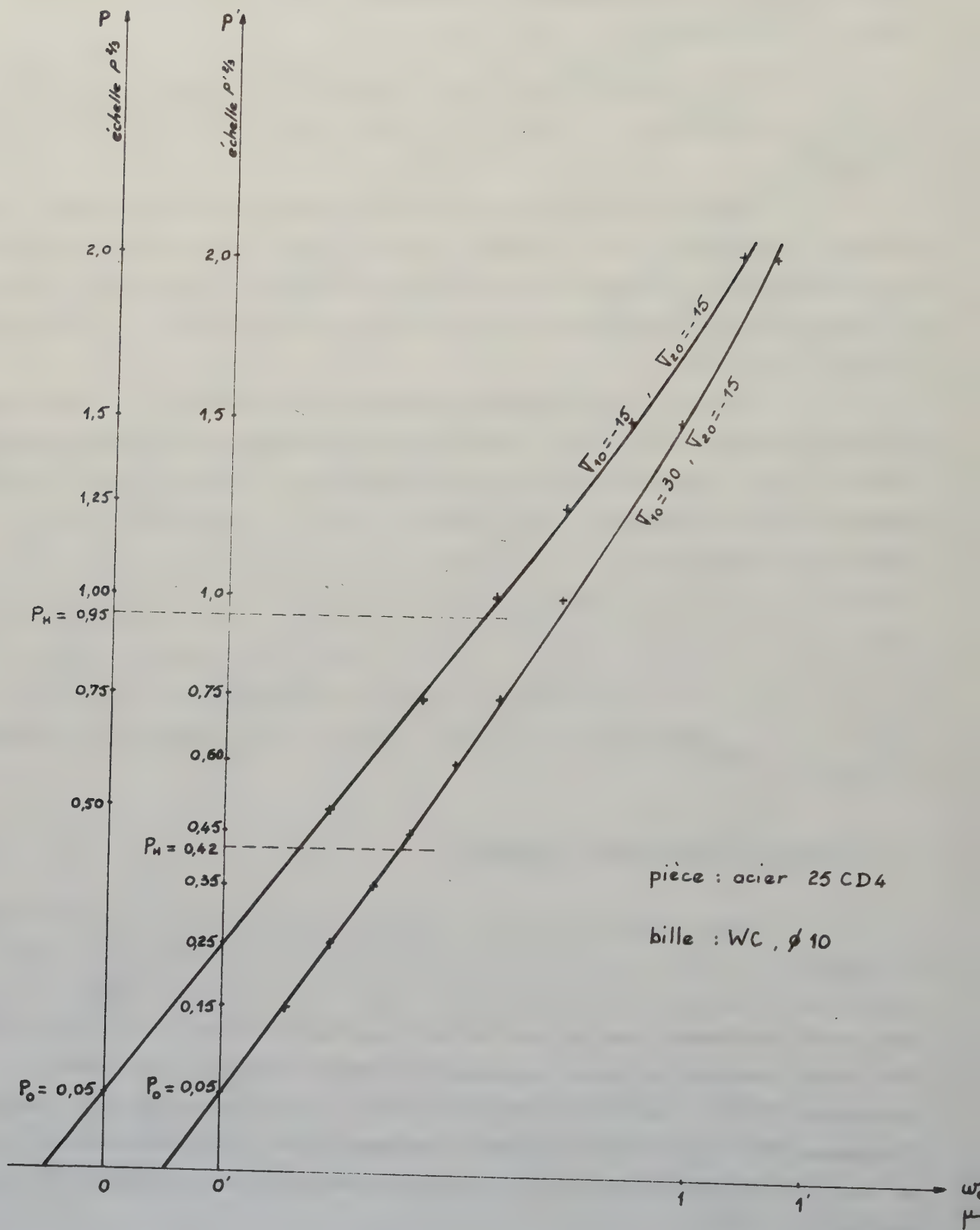


Figure 42

6.4. ETUDE DE LA VARIATION DE LA DURETE HERTZIENNE EN FONCTION σ_{10} et σ_{20} :

plaque σ_{10} hbar	0	45	45	45	45	0	30	30	30	30	0
σ_{20} hbar	0	45	30	15	0	0	30	15	0	- 15	0
$\bar{P}_H$ dN	0,622	0,075	0,118	0,179	0,172	0,788	0,329	0,377	0,434	0,386	0,690
erreur %	7,5	32,5	20,8	13,7	15,5	7,9	9,9	11,4	6,7	11,6	9,5
plaque σ_{10} hbar	15	15	15	15	0	0	0	0	0	- 15	- 15
σ_{20} hbar	15	0	- 15	- 30	0	- 15	- 30	- 45	0	- 15	- 30
$\bar{P}_H$ dN	0,446	0,577	0,631	0,606	0,613	0,927	1,017	1,066	0,689	1,146	1,489
erreur %	7,8	9,1	8,1	5,6	9,0	4,9	6,9	9,3	6,7	5,9	5,1
plaque σ_{10} hbar	- 15	0	- 30	- 30	- 45						
σ_{20} hbar	- 45	0	- 30	- 45	- 45						
$\bar{P}_H$ dN	1,648	0,693	2,102	2,316	2,794						
erreur %	5,0	6,8	3,9	5,3	3,3						

- Tableau 16 -

6.4.1. Etude de P_H en fonction de σ_{10} et σ_{20} :

Nous avons reporté nos résultats expérimentaux sur le tableau 16. D'après le paragraphe 3.1.2.1. et la figure 8, si nous supposons que la courbe intrinsèque est composée de deux droites, il doit exister une relation linéaire entre la dureté hertzienne p_H et la plus grande des contraintes σ_{10} .

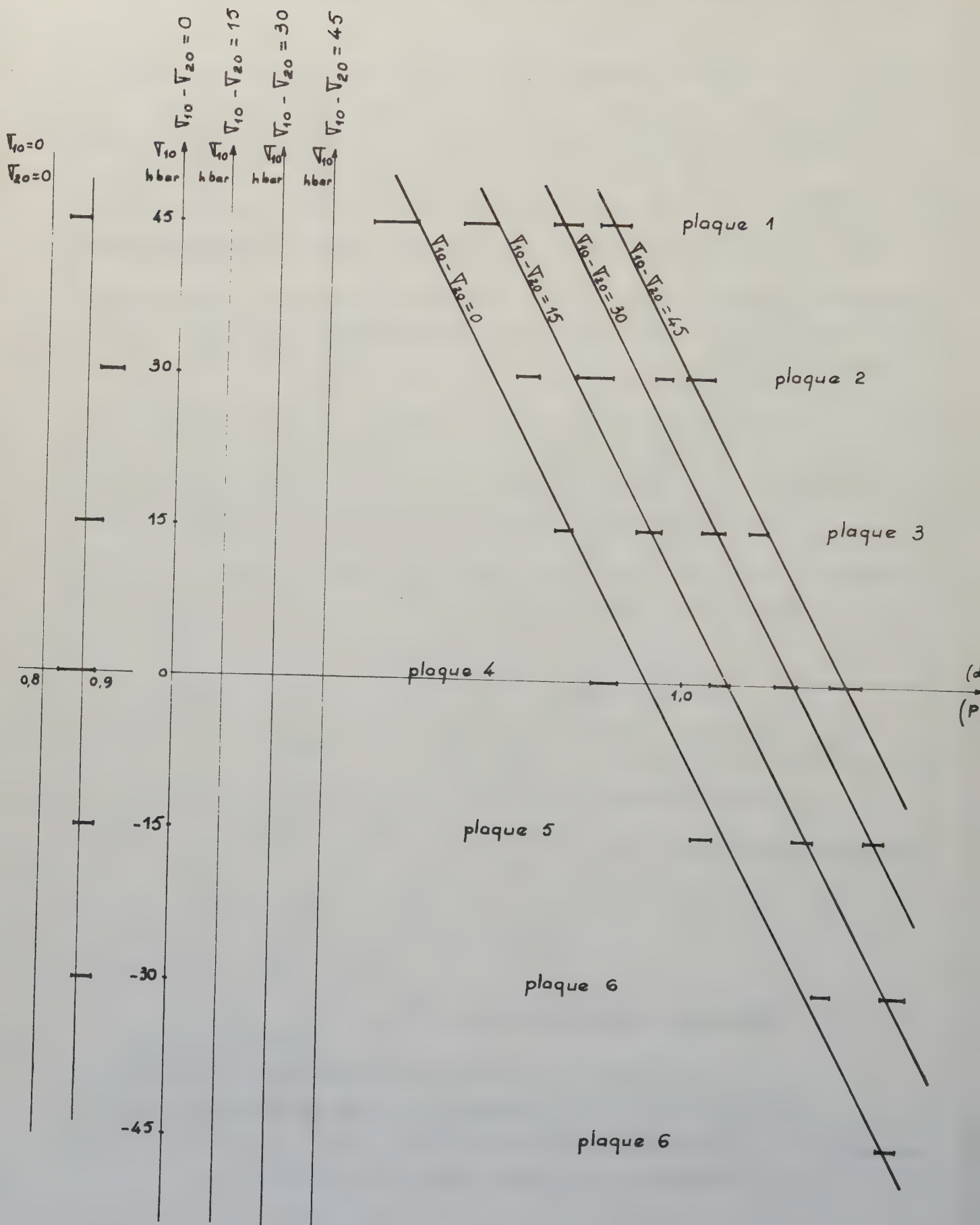


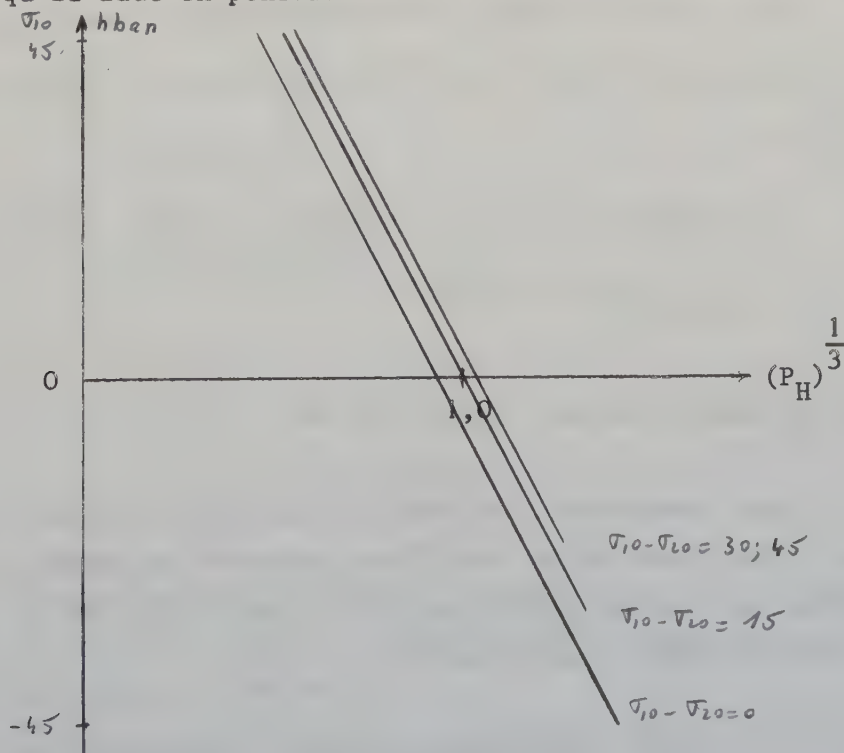
figure 43

En supposant que l'on puisse appliquer les formules d'Hertz dans cette expérience, d'après (5.5.1.) nous devons avoir une relation linéaire entre $(P_H)^{\frac{1}{3}}$ et σ_{10} pour tout σ_{20} tel que $\sigma_{20} \leq \sigma_{10}$.

Sur la figure 43 nous avons représenté les variations de $(P_H)^{\frac{1}{3}}$ en fonction de σ_{10} pour $\sigma_{10} - \sigma_{20}$ donné. Afin de clarifier la figure, nous avons décalé l'axe des σ_{10} pour chaque valeur de $\sigma_{10} - \sigma_{20}$.

Malgré l'utilisation de plusieurs plaques, nous trouvons une bonne concordance pour l'ensemble des résultats. Certains écarts s'expliquent en partie en considérant $(P_H)^{\frac{1}{3}}$ pour $\sigma_{10} = \sigma_{20} = 0$. Par exemple, pour la plaque 2, pour $\sigma_{10} = \sigma_{20} = 0$, $\overline{P_H}$ est significativement supérieur à la moyenne des autres plaques. Ceci explique le fait que pour $\sigma_{10} = 30$ et $\sigma_{10} - \sigma_{20} = 0, 15, 30, 45$, les quantités trouvées sont toutes supérieures à ce qu'elles devraient être.

D'après nos résultats, il semble que $(P_H)^{\frac{1}{3}}$ ne dépende pas que de σ_{10} mais aussi de σ_{20} ; de telle sorte que pour $\sigma_{10} - \sigma_{20}$ donné, $(P_H)^{\frac{1}{3}}$ est une fonction linéaire de σ_{10} dépendant de $\sigma_{10} - \sigma_{20}$. Sur la figure 44, nous avons résumé la figure 43. Nous verrons dans le chapitre suivant ce qu'il faut en penser.



- Figure 44 -

Remarquons enfin qu'au point de vue précision des résultats, celle-ci s'améliore lorsque σ_{10} diminue. Ceci est très visible sur le tableau 17 dans lequel nous avons pris l'incertitude relative moyenne (ayant une probabilité de 95 %) pour chaque valeur de σ_{10} .

σ_{10} hbar	45	30	15	0	- 15	- 30	- 45
erreur % sur $\overline{P}_H$	20,6	9,9	7,7	7,5	5,3	4,6	3,3

- Tableau 17 -

6.4.2. Etude p_H en fonction de σ_{10} et σ_{20} :

D'après la formule 5.5.1. nous devons avoir :

$$p_H = \frac{1}{\pi} \left[\frac{6}{\epsilon^2} \cdot \frac{P_H}{R_1^2} \right]^{\frac{1}{3}} \quad \text{soit} \quad p_H = K \cdot P_H^{\frac{1}{3}} \quad (6.4.1.)$$

Les relations expérimentales qui lient p_H avec σ_{10} et σ_{20} sont les mêmes que celles de la figure 44 en changeant l'échelle de l'axe des abscisses.

En prenant $R_1 = 5 \text{ mm}$, $\epsilon = 5,75 \cdot 10^{-5} \text{ hbar}$, nous trouvons

$$p_H = 132,7 P_H^{\frac{1}{3}} \quad (6.4.2.)$$

avec p_H exprimé en hbar et P_H en dN

Pour chaque état de contraintes, on peut tracer le cercle de Mohr de plus grand diamètre qui doit être tangent à la courbe intrinsèque. Pour les pièces qui ont un coefficient de Poisson voisin de 0,3 (voir figure 4), nous trouvons pour ce cercle :

$$\text{centre : } \frac{\sigma_{10}}{2} - 0,49 p_H \quad (6.4.3.)$$

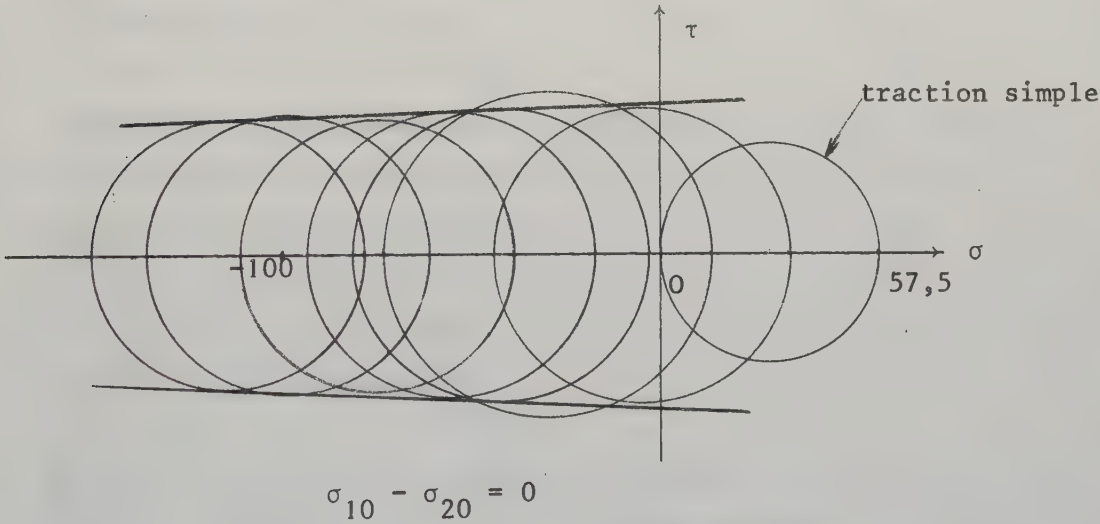
$$\text{diamètre : } \sigma_{10} + 0,62 p_H \quad (6.4.4.)$$

Par exemple, pour $\sigma_{10} - \sigma_{20} = 0$, en utilisant les formules précédentes :

σ_{10} hbar	45	30	15	0	- 15	- 30	- 45
p_H hbar	56,0	91,6	101,3	112,8	138,8	170,0	187,0
centre	- 5	- 30	- 42	- 55	- 75	- 98	- 114
diamètre	80	87	78	76	71	75	71

- Tableau 18 -

Les résultats de ce tableau sont résumés sur la figure 45.



- Figure 45 -

Nous constatons d'après cette expérience (et en accord avec d'autres), que la théorie de Hertz et celle de Mohr-Caquot ne se trouvent pas vérifiées sur deux points importants :

- la forme de l'enveloppe des cercles de Mohr n'a pas la forme de celle que l'on trouve habituellement pour les aciers (figure 45).



figure 46

- il semble que le critère de plasticité dépende de la contrainte intermédiaire σ_{20} (figure 44).

En partant du principe que la théorie de Mohr-Caquot est celle qui se rapproche le plus de la réalité, nous pensons que ces différences ont deux causes essentielles :

- l'hypothèse d'isotropie du matériau n'est pas exacte. Nous savons justement que dans certains cas d'anisotropie, il n'y a plus de courbe intrinsèque et il faudrait faire intervenir le tenseur d'anisotropie.

- l'état de surface, qui n'est pas parfait, crée des modifications dans la théorie de Hertz. La distribution de la pression de contact doit certainement être différente de celle que nous avons trouvée.

En ce qui concerne les diamètres des cercles de Mohr, tout se passe comme si nous avons surévalué de plus en plus P_H au fur et à mesure que nous augmentions σ_{10} . Ceci peut par exemple s'expliquer en supposant que R_1 est une fonction croissante de σ_{10} .

6.4.3. Conclusion :

Malgré certaines divergences avec les prévisions des théories de Hertz et de Mohr-Caquot, nous avons vérifié la possibilité de déterminer σ_{10} connaissant P_H . Cette détermination ne peut se faire correctement qu'en milieu isotrope, avec un état de surface parfaitement poli. Dans la pratique, le mieux est de connaître la relation qui lie ces deux quantités, cette relation ayant été obtenue par étalonnage.

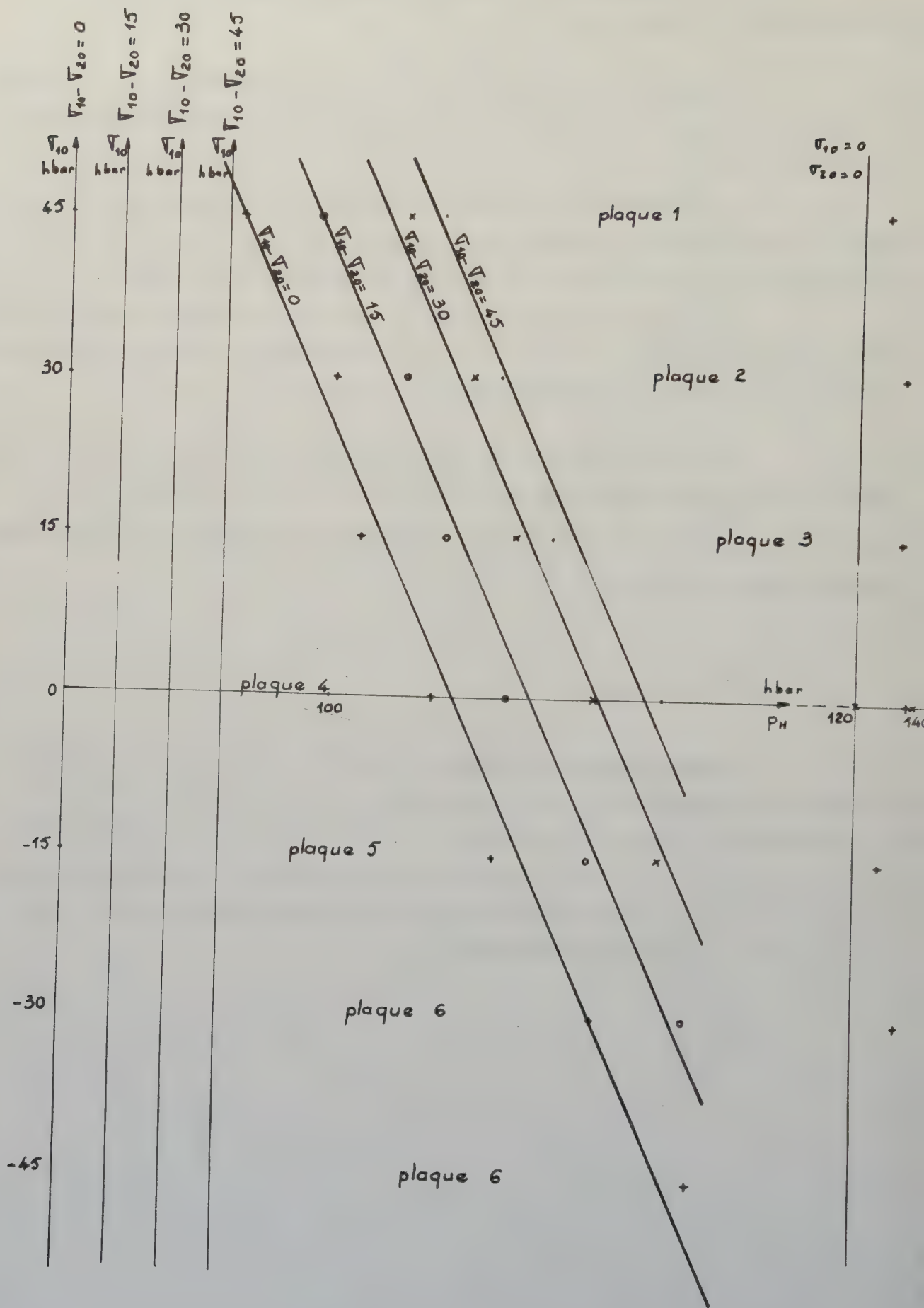


figure 47

6.5. ETUDE DE LA VARIATION DE Φ EN FONCTION DE σ_{10} et σ_{20} :

plaque σ_{10} hbar	1 0	1 45	1 45	1 45	1 45	2 0	2 30	2 30	2 30	2 30	3 0
σ_{20} hbar	0	45	30	15	0	0	30	15	0	- 15	0
$\bar{\Phi} - \frac{2}{3}$ μ (dN)	0,769	0,866	0,857	0,775	0,750	0,761	0,753	0,760	0,762	0,741	0,775
erreur %	2,0	4,8	1,9	3,0	3,3	1,5	1,1	2,8	4,4	2,6	1,3
plaque σ_{10} hbar	3 15	3 15	3 15	3 15	4 0	4 0	4 0	4 0	5 0	5 - 15	5 - 15
σ_{20} hbar	15	0	- 15	- 30	0	- 15	- 30	- 45	0	- 15	- 30
$\bar{\Phi} - \frac{2}{3}$ μ (dN)	0,751	0,758	0,764	0,749	0,797	0,765	0,786	0,793	0,754	0,777	0,777
erreur %	1,7	2,2	1,8	2,4	1,9	1,0	0,8	0,7	1,3	1,2	1,3
plaque σ_{10} hbar	5 - 15	6 0	6 - 30	6 - 30	6 - 45						
σ_{20} hbar	- 45	0	- 30	- 45	- 45						
$\bar{\Phi} - \frac{2}{3}$ μ (dN)	0,777	0,770	0,778	0,793	0,808						
erreur %	1,5	1,0	1,8	0,4	1,7						

- Tableau 19 -

6.5.1. Résultats

Dans le tableau 19 et la figure 46, nous avons reporté les résultats expérimentaux sur Φ . Rappelons que nous devons avoir d'après (5.1.15.)

$$\Phi = \left[\frac{9\varepsilon^2}{16R_1} \right]^{\frac{1}{3}}$$

avec

$$\varepsilon = \left(\frac{1 - \nu^2}{E} \right)_{\text{bille}} + \left(\frac{1 - \nu^2}{E} \right)_{\text{pièce}}$$

R_1 : rayon de la bille

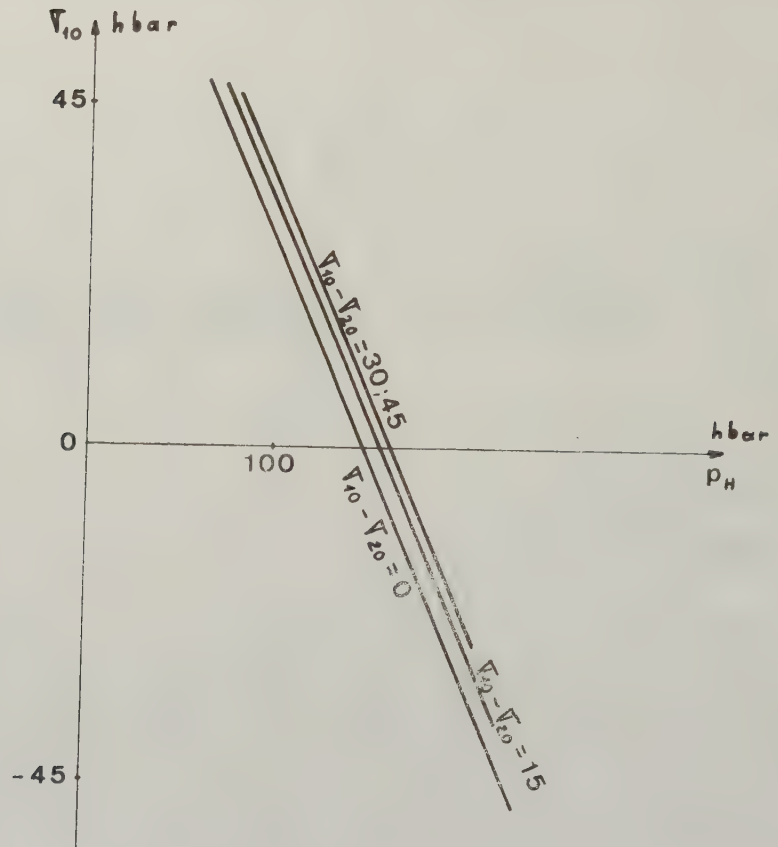


figure 48

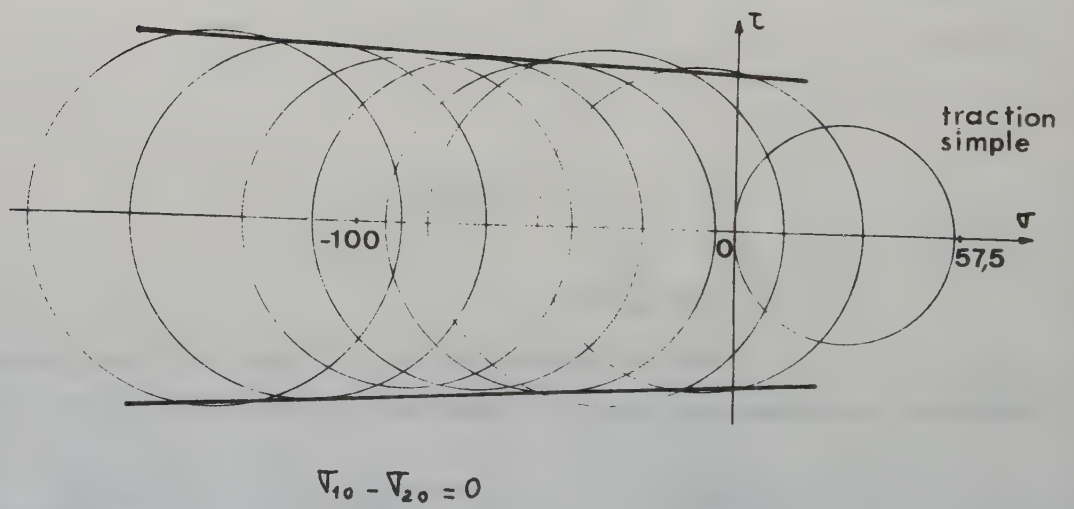


figure 49

En considérant la figure 46, il est clair que nous avons obtenu une bonne concordance pour l'ensemble des résultats, malgré l'hétérogénéité due aux six plaques. La plupart des intervalles de confiance sont inclus dans l'intervalle $[0,730 ; 0,800]$ ce qui fait une faible dispersion. Il y a deux résultats, tous deux sur la plaque N° 1, qui paraissent anormaux. Ils doivent correspondre à une mauvaise détermination de P_0 (mauvais équilibrage du plateau).

Notons enfin que Φ ne semble pas dépendre de σ_{10} et σ_{20} . Nous avons donc là une quantité permettant de donner des renseignements sur ϵ ou R_1 .

6.5.2. Relation entre p_H et Φ :

D'après la fin du chapitre 6.4.2.), et en accord avec le chapitre (5.5.) sur l'essai de similitude, nous sommes convaincus que pour pouvoir appliquer les formules de Hertz, il faut prendre $R_1 = R.f(R)$, f étant une fonction que nous ne connaissons pas. En éliminant R_1 entre (2.3.5.) et (5.1.15.) nous trouvons :

$$p_H = \frac{8}{3\pi} \cdot \frac{\Phi^2}{\epsilon} \cdot P_H^{\frac{1}{3}} \quad (6.5.1.)$$

Appliquons la formule précédente aux résultats expérimentaux des tableaux 16 et 19. Nous trouvons alors la figure 47. Sur cette figure nous constatons une bonne concordance pour l'ensemble des résultats ; elle semble même légèrement meilleure que celle de la figure 43.

Sur la figure 48, nous avons résumé les résultats de la figure 47. Là encore nous remarquons que pour σ_{10} fixé, p_H dépend de σ_{20} pour $\sigma_{20} < \sigma_{10}$ (conséquence probable de l'anisotropie de la pièce).

Pour $\sigma_{10} - \sigma_{20} = 0$, nous avons tracé les cercles de Mohr : voir figure 49. Nous constatons alors que les théories de Hertz et de Mohr-Caquot sont mieux vérifiées en utilisant la formule (6.5.1.) plutôt que (6.4.1.). Il ne fait aucun doute que la quantité R_1 n'est pas indépendante σ_{10} . Pour éliminer cette difficulté, il y a donc intérêt à utiliser la formule (6.5.1.)

Remarquons enfin, sur la figure 49, qu'il suffit que la limite à la traction en surface soit supérieure de 20 % à celle trouvée en moyenne sur une section, pour qu'il y ait une bonne concordance. Cette différence est vraisemblable si l'on tient compte des traitements superficiels subit par la pièce (rectification, polissage).

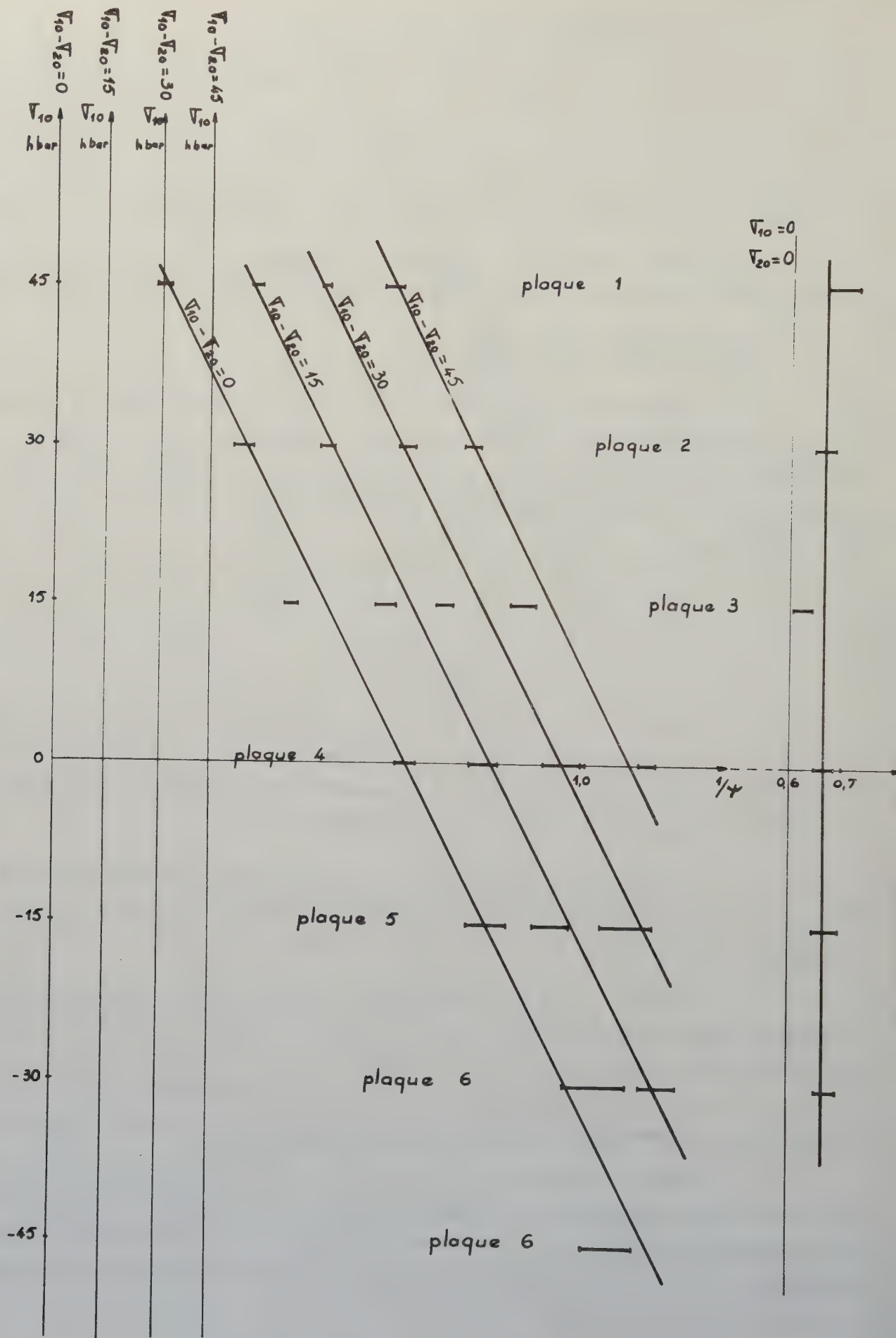


figure 50

6.5.3. Conclusion

Pour améliorer la méthode de dureté hertzienne définie par J. POMEY, F. GOUTEL et L. ABEL, nous proposons donc, pour chaque essai, de mesurer les quantités P_H et Φ .

Si ε est connu, la dureté hertzienne sera donnée par la formule :

$$P_H = \frac{8}{3\pi} \frac{\Phi^2}{\varepsilon^2} P_H^{\frac{1}{3}}$$

Comme nous l'avons vu, cela permet d'éliminer la difficulté due à R_1 .

Si ε est inconnu, on peut alors trouver une valeur approchée de P_H par la formule :

$$P_H = \frac{3}{2\pi} \frac{P_H^{\frac{1}{3}}}{\Phi R_1} \quad (\text{en prenant } R_1 \text{ théorique})$$

Il est nécessaire bien sur que la détermination de Φ soit juste ; il faut donc que l'appareil qui mesure les déplacements de la bille soit très bien étalonné.

6.6. ETUDE DE LA VARIATION DE ψ EN FONCTION DE σ_{10} et σ_{20}

6.6.1. Résultats expérimentaux

Dans le tableau 20, nous avons inscrit la valeur moyenne de Θ ainsi que l'incertitude correspondante. La figure 50 représente les variations de $\frac{1}{\psi}$ en fonction de σ_{10} pour différentes valeurs de $\sigma_{10} - \sigma_{20}$. Nous avons décalé l'axe des ordonnées pour clarifier la figure. Sur ces résultats, nous avons pu ajuster des droites avec une bonne précision : ces droites sont re-tracées sur la figure 51.

6.6.2. Interpolation des résultats

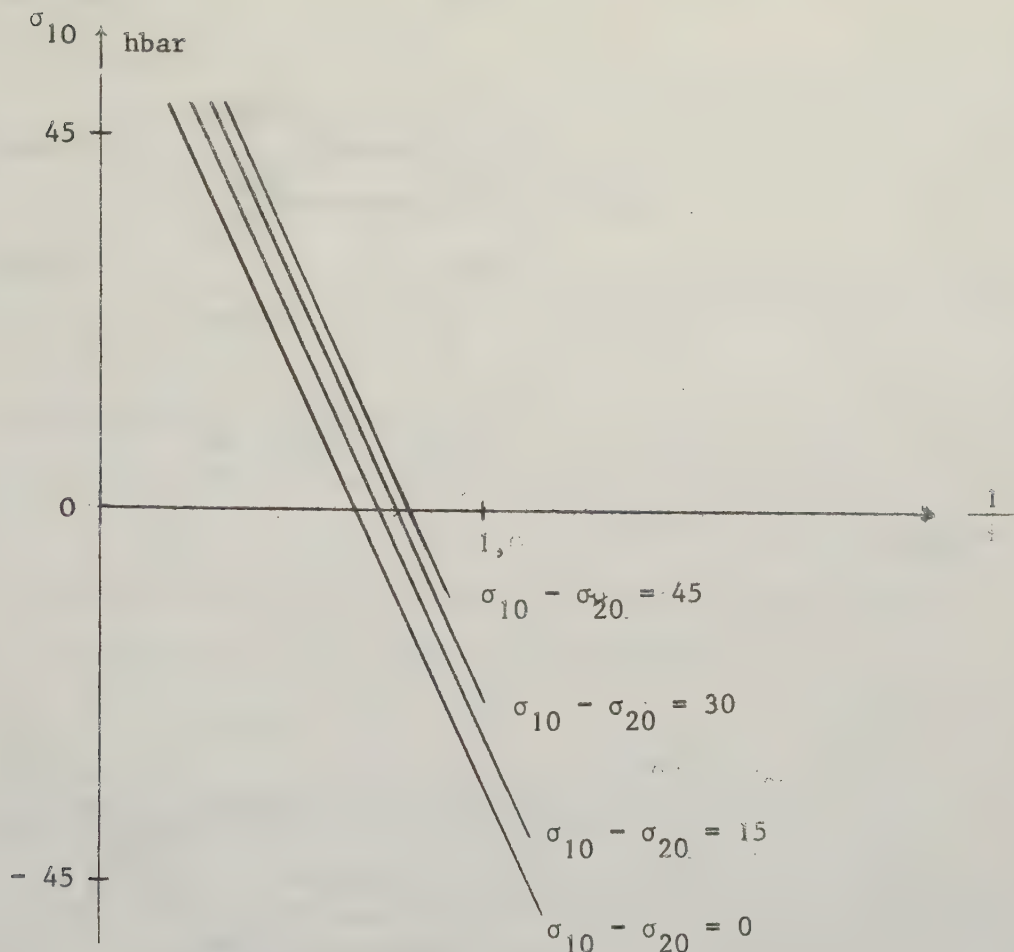
Nous constatons sur la figure 50 que pour $\sigma_{10} - \sigma_{20}$ constant, $\frac{1}{\psi}$ peut être considéré comme une fonction linéaire de σ_{10} . Une partie de la dispersion des résultats s'explique en considérant la plaque à l'état de repos ($\sigma_{10} = \sigma_{20} = 0$). C'est le cas pour la plaque 3.

plaque σ_{10} hbar	1 0	1 45	1 45	1 45	1 45	2 0	2 30	2 30	2 30	2 30	3 0
σ_{20} hbar	0	45	30	15	0	0	30	15	0	- 15	0
$\bar{\Psi}$ $10^{-2} \mu N^{-1}$ erreur %	1,440	4,960	3,580	3,242	2,980	1,511	2,810	2,416	2,140	2,050	1,602
	4,2	6,8	3,4	2,9	4,9	3,0	5,8	3,1	3,3	3,5	2,9
plaque σ_{10} hbar	3 15	3 15	3 15	3 15	4 0	4 0	4 0	4 0	5 0	5 - 15	5 - 15
σ_{20} hbar	15	0	- 15	- 30	0	- 15	- 30	- 45	0	- 15	30
$\bar{\Psi}$ $10^{-2} \mu N^{-1}$ erreur %	2,233	1,906	1,855	1,712	1,498	1,400	1,307	1,217	1,500	1,216	1,188
	3,0	3,8	3,0	4,2	2,7	3,6	5,0	1,8	3,6	4,8	4,1
plaque σ_{10} hbar	5 - 15	6 0	6 - 30	6 - 30	6 - 45						
σ_{20} hbar	- 45	0	- 30	- 45	- 45						
$\bar{\Psi}$ $10^{-2} \mu N^{-1}$ erreur %	1,125	1,486	0,975	0,961	0,950						
	6,1	2,9	5,6	3,4	4,5						

- Tableau 20 -

σ_{10} hbar	45	30	15	0	- 15	- 30	- 45
erreur moyenne %	4,5	3,9	3,5	3,3	5,0	4,5	4,5

- Tableau 21 -



- Figure 51 -

Dans notre expérience, nous pouvons considérer que les quatre droites tracées sont parallèles (voir figure 51.)

Au point de vue dispersion des résultats, il semble d'après le tableau 21 que l'incertitude relative moyenne, liée à chaque valeur de $\bar{\Psi}$ soit indépendante de σ_{10} . En conséquence, la précision des résultats est meilleure lorsque $\bar{\Psi}$ est petit, c'est-à-dire lorsque σ_{10} est grand (ce qui est l'inverse de ce que nous trouvons pour $\mathbf{P}_H$). Ceci est très visible en considérant les intervalles de confiance tracés sur la figure 50. Notons que les dispersions sur Ψ et $\mathbf{P}_H$ semblent à peu près indépendantes (voir tableaux 20 et 16.).

Sur la figure 52, nous avons montré que pour $\mathbf{P}_H$ donné, Ψ ne peut pas être quelconque. En première approximation, il semble qu'il y ait une relation linéaire entre $(\mathbf{P}_H)^{\frac{1}{3}}$ et Ψ^{-1} . Ceci est d'ailleurs évident en composant les figures 48 et 51.

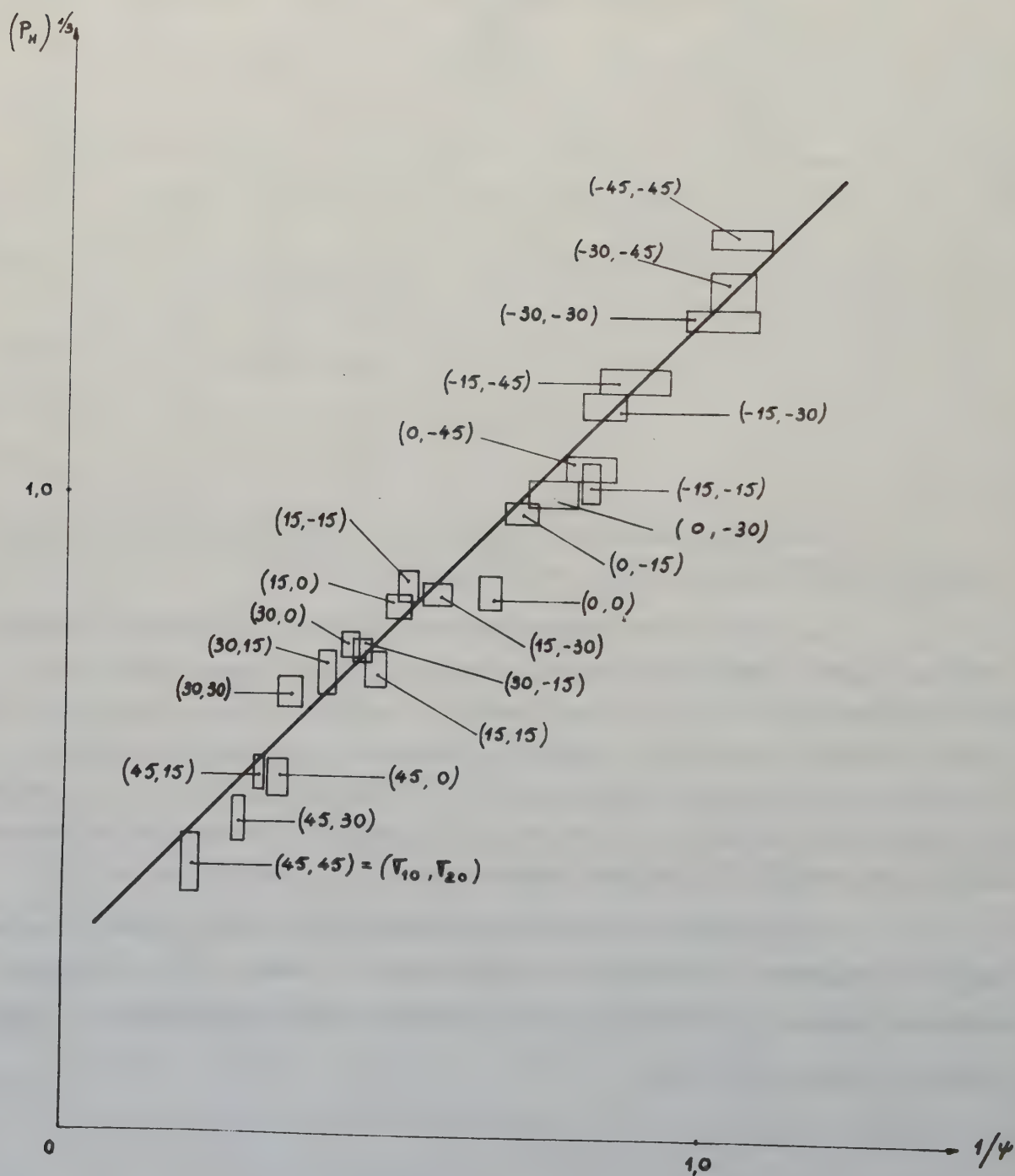
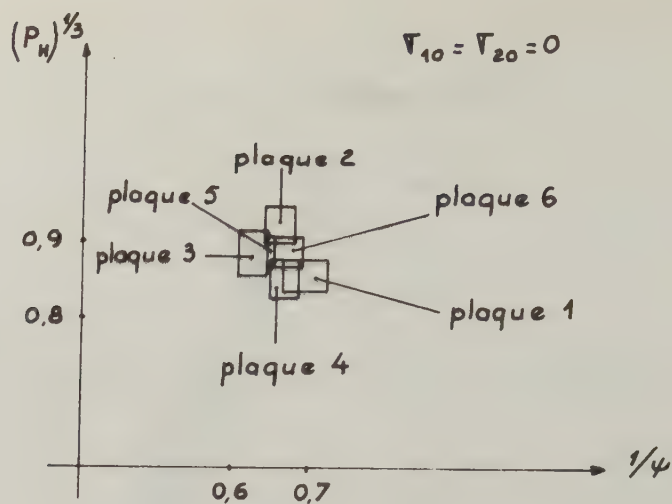


Figure 52

6.6.3. Conclusion :

Nous pensons avoir mis en évidence l'existence de relations liant $\frac{1}{\Psi}$, σ_{10} et $\sigma_{10} - \sigma_{20}$. Bien sûr, nous n'avons pas déterminé avec précision ces relations, car pour cela il est nécessaire de faire de nombreuses expériences que nous n'avons pas envisagé de faire ici.

Du point de vue détermination des contraintes superficielles, la connaissance d'un réseau tel que celui de la figure 51 est très importante. En effet, il est donc possible avec une bille de déterminer σ_{10} (en trouvant p_H) et σ_{20} (avec le réseau de droites). Notons que la précision sur σ_{20} est d'autant plus importante que σ_{10} est grand, algébriquement.

6.7. AMELIORATION DE LA METHODE DE DURETE HERTZIENNE :

Jusqu'à présent, la méthode de dureté hertzienne permettait de déterminer σ_{10} à partir de P_H . Nous avons montré que le passage de P_H à p_H en utilisant la formule (6.4.1.) introduit des erreurs dues à R_1 lorsque l'état de surface n'est pas parfait. Nous proposons alors la méthode suivante :

- à chaque essai on détermine P_H , Φ et Ψ ;
- après n essais identiques (nous avons pris $n = 10$), on précise les quantités $\overline{p_H} = \frac{8}{3 \pi \epsilon^2} (\overline{P_H^{\frac{1}{3}} \Phi^2})$ et $(\overline{\frac{1}{\Psi}})$ ainsi que leur intervalle de confiance ;
- à l'aide de graphe (p_H, σ_{10}) , on détermine σ_{10} et l'incertitude absolue correspondante ;
- à l'aide du faisceau $(\frac{1}{\Psi}, \sigma_{10}, \sigma_{10} - \sigma_{20})$, on détermine σ_{20} ainsi que l'incertitude absolue correspondante.

En plus du graphe (p_H, σ_{10}) , les améliorations que nous proposons nécessitent la connaissance du faisceau $(\frac{1}{\Psi}, \sigma_{10}, \sigma_{10} - \sigma_{20})$. Dans notre étude, nous n'avons fait que mettre en évidence l'existence d'un tel faisceau pour un matériau donné (acier 25CD4, recuit). Nous n'avons fait qu'ouvrir une porte supplémentaire sur l'étude du contact plastique naissant d'une bille dure avec une pièce.

VII - UTILISATION D'UN PENETRATEUR ELLIPTIQUE
EN DURETE HERTZIENNE

7.1. INTRODUCTION :

Nous avons vu dans le chapitre 3.2., que l'utilisation d'un pénétrateur elliptique en dureté hertzienne, permet théoriquement de déterminer les directions principales, la plus grande des contraintes superficielles et quelquefois la plus petite. Toutes ces déterminations doivent se faire à partir de p_H dureté hertzienne.

Pour généraliser le chapitre précédent il faudrait refaire les expériences avec un pénétrateur elliptique. Ces expériences devraient être beaucoup plus longues car il y aurait un paramètre nouveau : l'angle θ que font les axes du pénétrateur avec les directions principales du tenseur des contraintes superficielles.

Bien qu'une telle étude n'ait pas été prévue dans notre programme initial de recherche, nous avons effectué à titre documentaire quelques essais. Ci-après, nous rendons compte de deux de ces essais.

7.2. CONDITIONS EXPERIMENTALES :

Ces conditions ont été voisines de celles du chapitre 6, à savoir :

- pièces : acier 25 CD4 recuit, poli 600

- pénétrateur : peut être assimilé à un ellipsoïde dans la zone centrale ; voir figure 2. Il a deux rayons de courbure au contact avec la pièce : $R_1 = 10,9 \text{ mm}$; $R_2 = 2,7 \text{ mm}$

- nombre d'essais répétés : 10

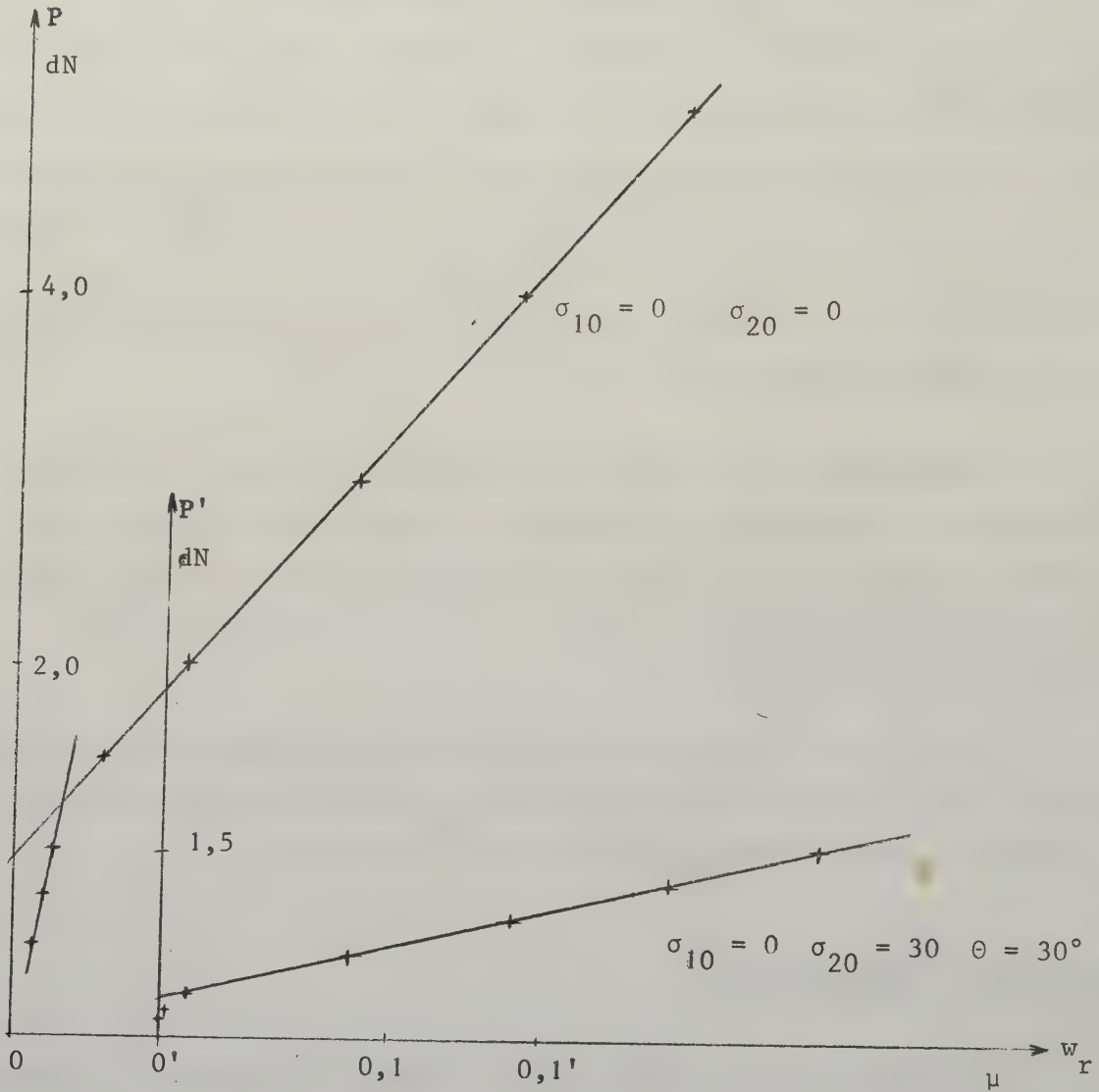
- angle θ : $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$
(Voir définition 3.2.2.)

- états de contraintes : $\sigma_{10} = 0$ $\sigma_{20} = 0$

et $\sigma_{10} = 0$ $\sigma_{20} = 30 \text{ hbar}$

7.3. ETUDE DES ENFONCEMENTS

7.3.1. Enfoncements résiduels

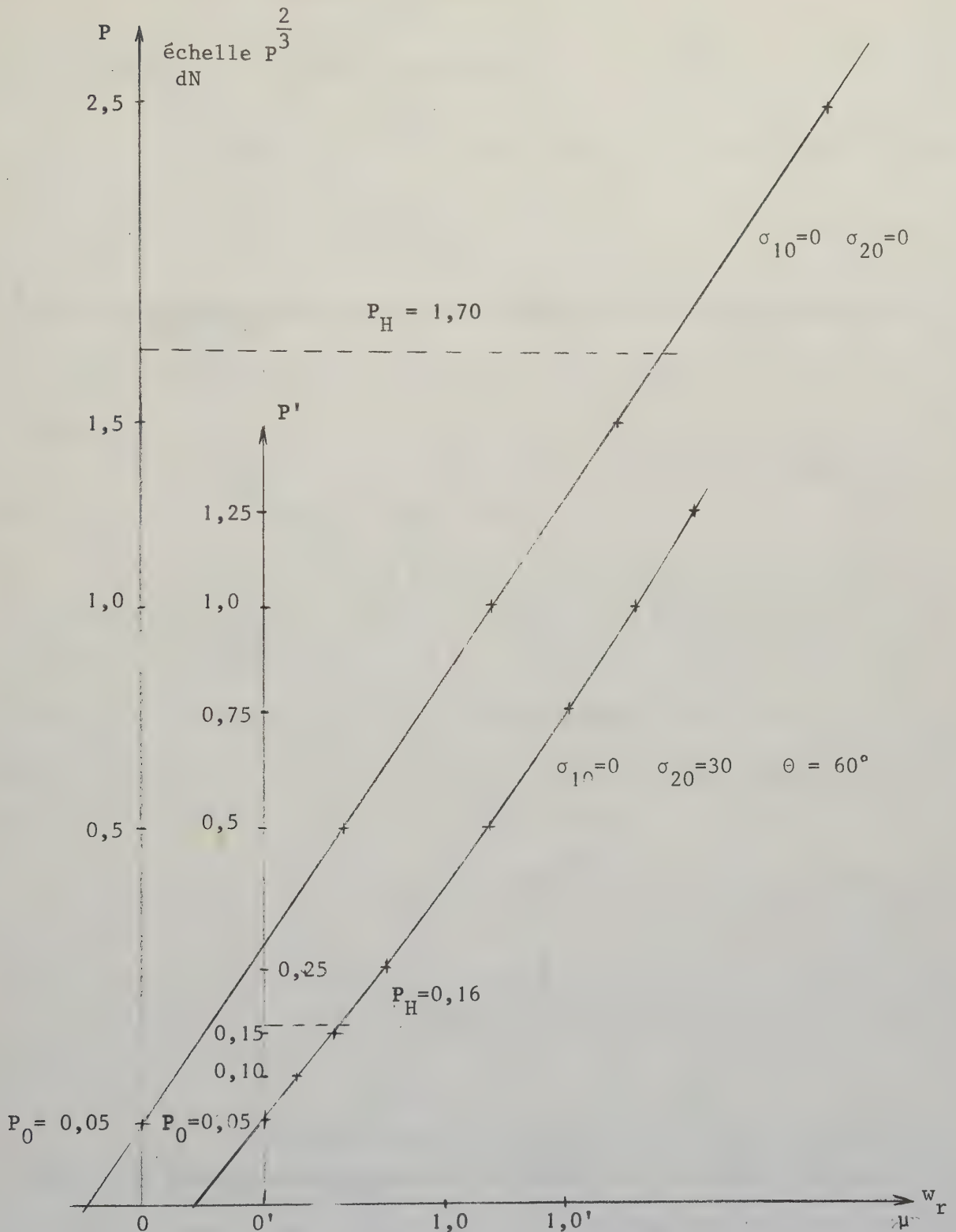


- figure 53 -

Sur la figure 53, nous avons représenté deux courbes ($w_r - P$). Nous avons trouvé qu'avec un pénétrateur elliptique, la forme des courbes ($w_r - P$) était semblable à celle de la figure 27.

A chaque essai, nous pouvons donc encore associer les quantités P_H et Ψ qui sont définies dans le chapitre (5.1.1.).

7.3.2. Enfoncements élastiques



- figure 54 -

Sur la figure 54, nous avons représenté deux courbes ($w_e, P^{\frac{2}{3}}$). Comme pour ces deux courbes, nous avons retrouvé la linéarité dans le domaine élastique ($P < P_H$) et même un peu au-delà. A chaque essai, nous pouvons donc associer également la quantité Φ comme dans les chapitres précédents :

$$\Phi = \frac{\Delta w_e}{\Delta P^{\frac{2}{3}}}$$

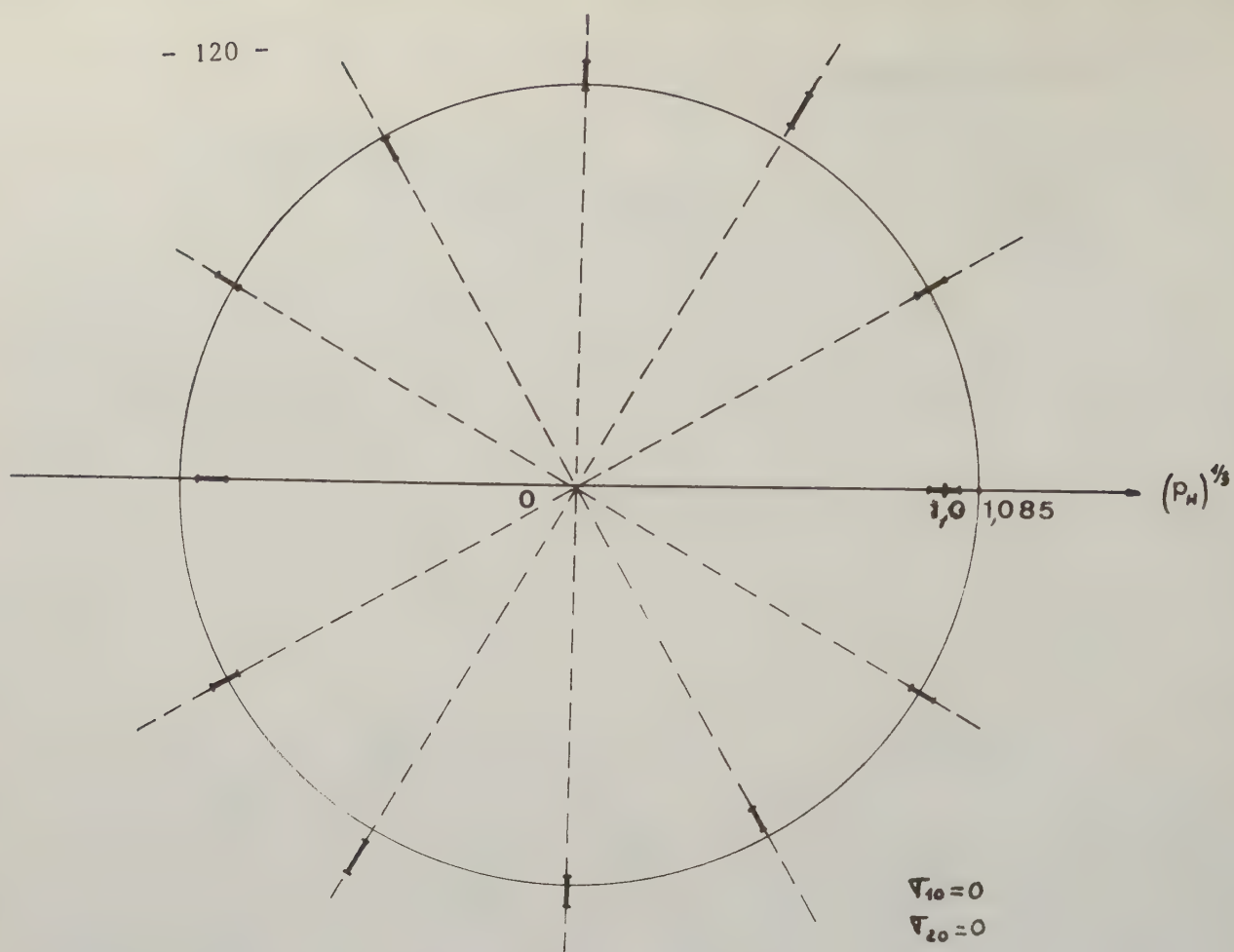


figure 55

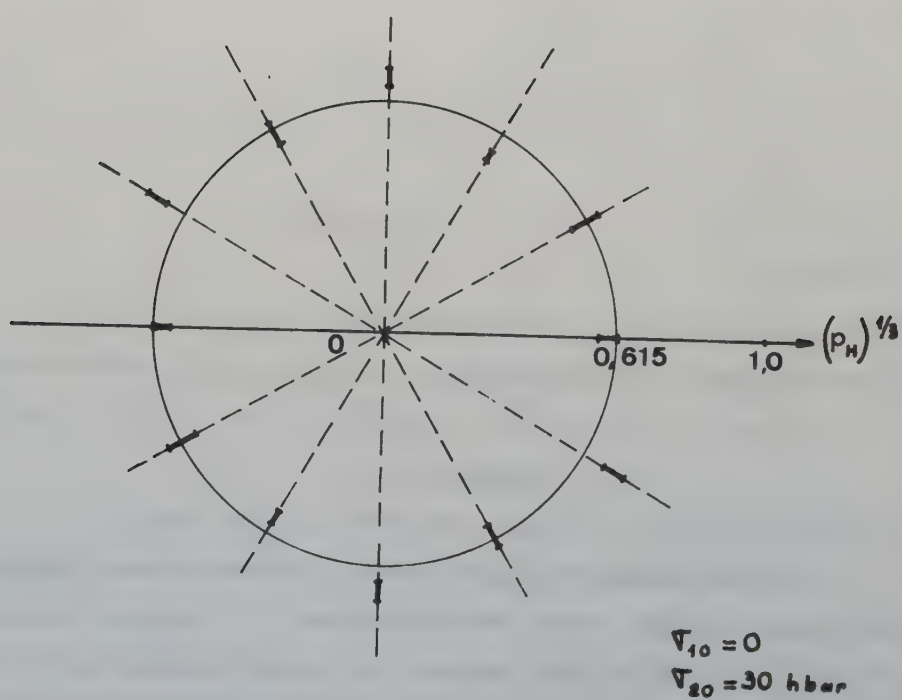


figure 56

7.4. VARIATIONS DE LA DURETE HERTZIENNE :

D'après (2.2.66.) nous devons avoir pour le pénétrateur utilisé :

$$p_H = 0,971 \left[\varepsilon^{-2} R_1^{-2} p_H \right]^{\frac{1}{3}} \quad (7.4.1.)$$

p_H doit donc être proportionnel à $(p_H)^{\frac{1}{3}}$. Sur les figures 55 et 56 nous avons représenté les intervalles de confiance de $(p_H)^{\frac{1}{3}}$ obtenus en fonction de l'angle θ .

Nous constatons alors que :

- sur les figures 55 et 56, la dispersion des résultats est importante aussi bien pour chaque valeur de θ que pour l'ensemble. D'après les figures 15 et 20 pour $\sigma_{10} = 0$ et $\sigma_{20} = 30$ hbar, le graphe $p_H(\theta)$ doit passer par un maximum pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ et par un minimum pour $\theta = 0$. A partir de la figure 56, il n'est pas possible de prévoir un tel résultat du fait de la grande dispersion des mesures effectuées.

- les valeurs moyennes de $(p_H)^{\frac{1}{3}}$ trouvées sont de 1,085 pour $\sigma_{10} = 0$ $\sigma_{20} = 0$ et de 0,615 pour $\sigma_{10} = 0$ $\sigma_{20} = 30$. Ces quantités donnent des cercles de Mohr de diamètre respectif : 91 hbar et 78 hbar. Ces quantités sont supérieures à ce qu'elles devraient être puisque la limite à la traction est de 57,5 hbar.

A titre de comparaison, notons que les rayons de courbure du pénétrateur elliptique utilisé sont tels que pour un même p_H , la quantité p_H calculée est sensiblement identique à celle trouvée dans le cas de la bille de même nature, de diamètre 10 mm.

En effet, d'après (6.4.1.) et (7.4.1.) nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \left(\frac{6}{25} \right)^{\frac{1}{3}} &= 0,198 \\ 0,971 (10,7)^{-\frac{2}{3}} &= 0,200 \end{aligned}$$

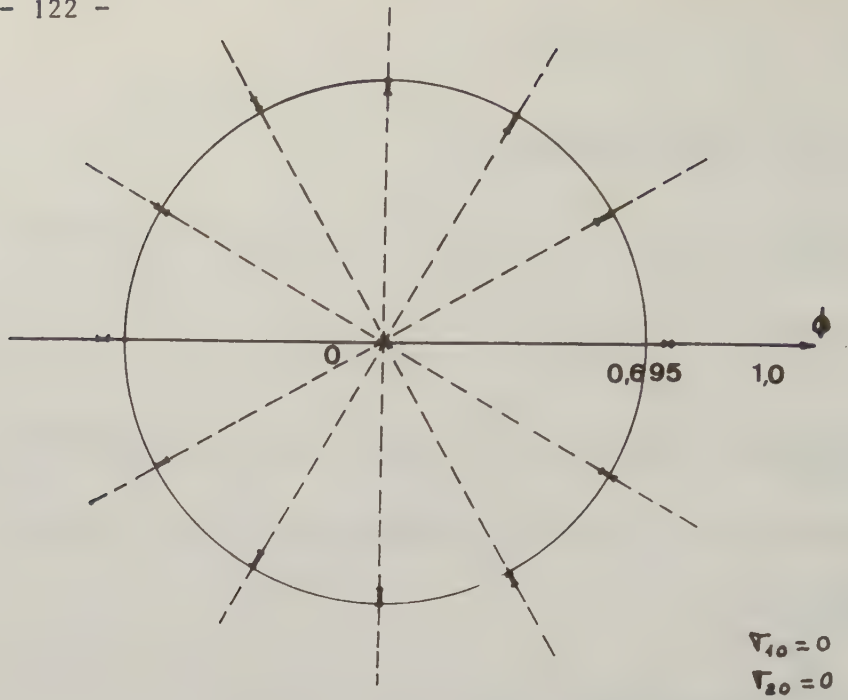


figure 57

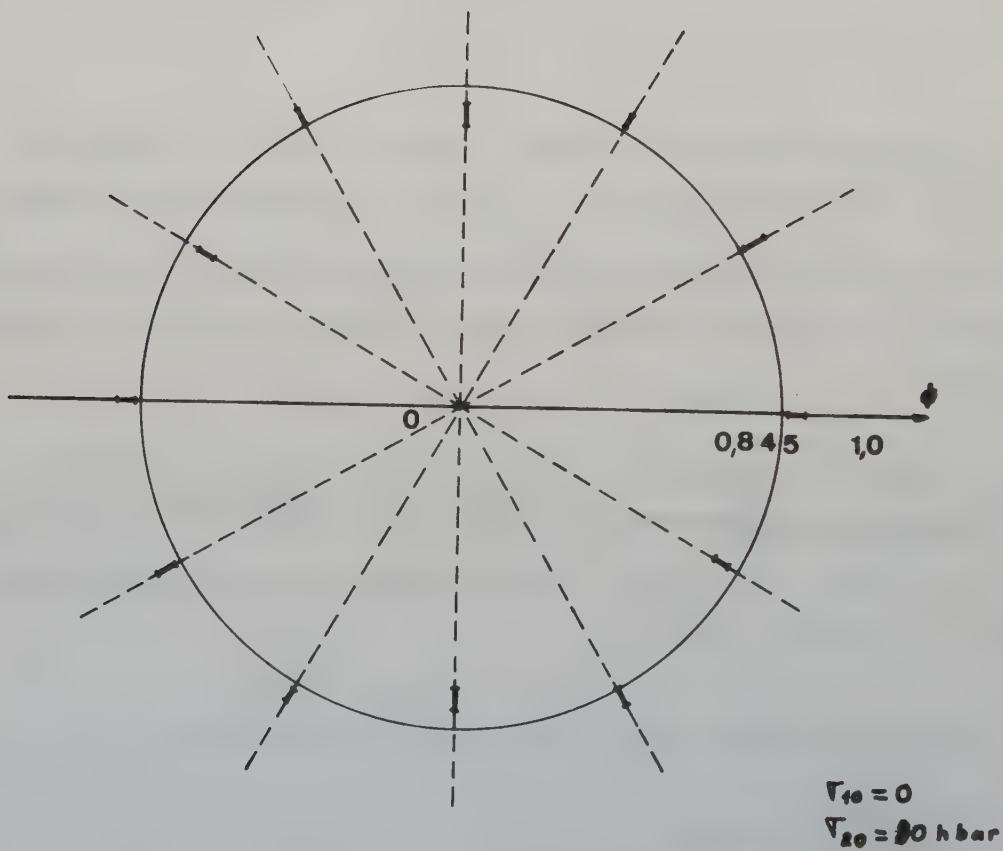


figure 58

Pour une bille nous avons trouvé comme valeurs ajustées, d'après la figure 43 :

$$\begin{aligned} \sigma_{10} = 0 \quad \sigma_{20} = 0 & : (P_H)^{\frac{1}{3}} = 0,940 \\ \sigma_{10} = 0 \quad \sigma_{20} = 30 & : (P_H)^{\frac{1}{3}} = 0,715 \end{aligned}$$

7.5. VARIATIONS DE Φ

Sur les figures 57 et 58 nous avons représenté les valeurs de $\bar{\Phi}$ trouvées ainsi que leur incertitude absolue à 95 %. Nous constatons que :

- pour différentes valeurs de θ , la dispersion des résultats est assez importante (de l'ordre de 13 %). Il ne semble pas y avoir de direction privilégiée pour $\sigma_{10} = 0$ et $\sigma_{20} = 30$.
- d'après (2.2.54) et (2.2.62), on doit avoir :

$$\boxed{\Phi = 1,014 \left[\frac{\epsilon^2}{R_1} \right]^{\frac{1}{3}}} \quad (7.5.1.)$$

En prenant $\epsilon = 5,75 \text{ mm}^2 \text{ (dN)}^{-1}$ et $R_1 = 10,9 \text{ mm}$, on trouve la valeur théorique de Φ : $0,682 \mu \text{ (dN)}^{-\frac{2}{3}}$. Cette valeur est en bonne concordance avec celles trouvées pour $\sigma_{10} = \sigma_{20} = 0$ et est nettement inférieure à celles trouvées pour $\sigma_{10} = 0 \quad \sigma_{20} = 30$.

- les formules (7.4.1.) et (7.5.1.) donnent :

$$\boxed{P_H = 0,943 \epsilon^{-2} \Phi^2 (P_H)^{\frac{1}{3}}} \quad (7.5.2.)$$

En appliquant cette relation nous n'avons pas trouvé d'amélioration dans la courbe $p_H(\theta)$: la dispersion est toujours grande et il n'y a pas de direction privilégiée.

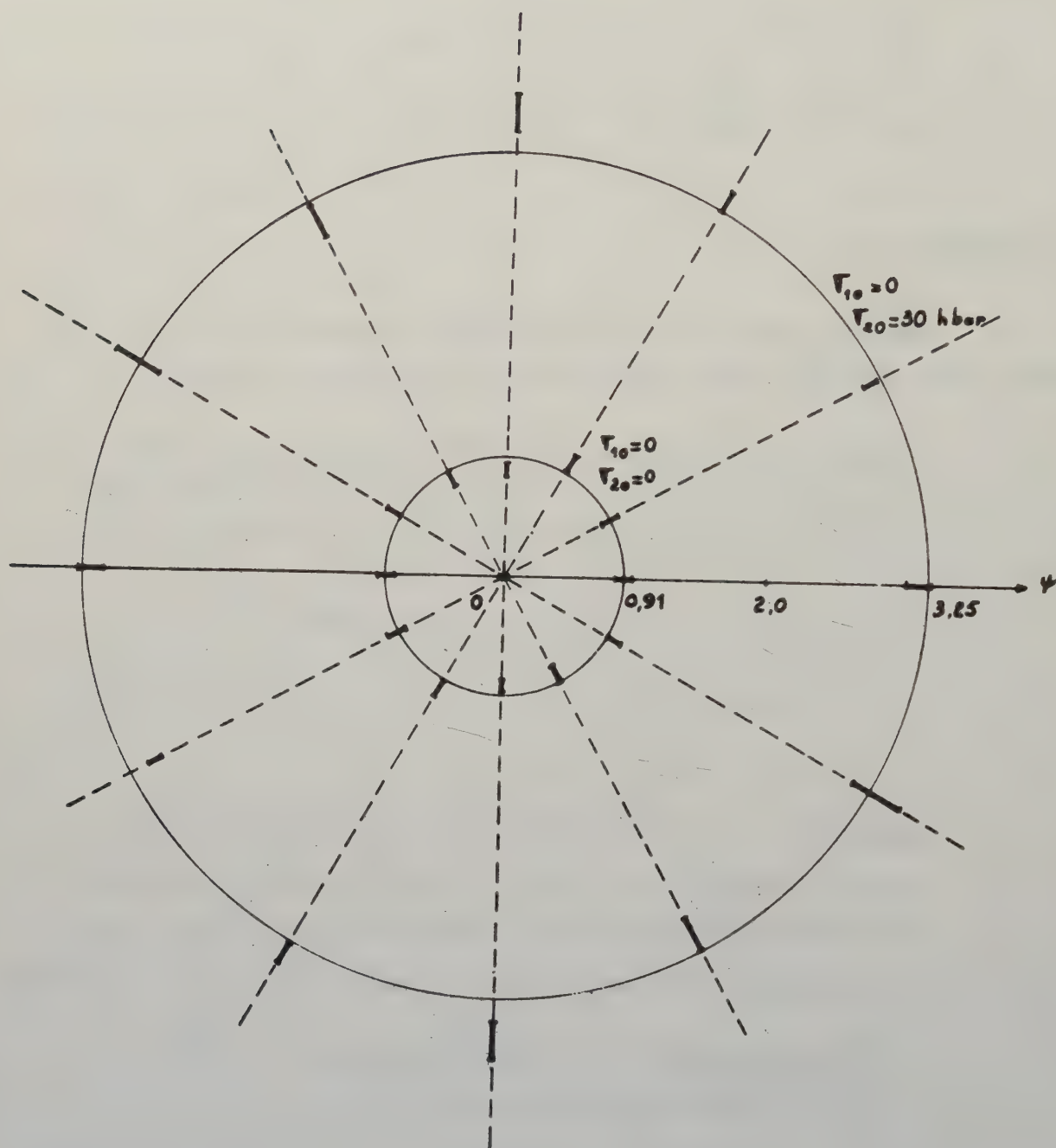


figure 59

7.6. VARIATIONS DE Ψ

Nous avons reporté nos résultats expérimentaux sur la figure 59. Nous remarquons toujours que la dispersion est importante et qu'il n'est pas possible à partir d'un tel graphique de prévoir les directions principales. Nous notons aussi que dans le passage de σ_{20} de Θ à 30 hbar, Ψ a été multiplié par près de 3,5, ce qui montre que Ψ est très sensible à la plus grande des contraintes principales.

7.7. CONCLUSION SUR LE PENETRATEUR ELLIPTIQUE :

Au début de ce chapitre, nous avons montré que pour un pénétrateur elliptique, les courbes (w_r, P) et (w_e, P_3^2) ont la même allure que celles trouvées avec une bille. Il est donc possible de définir également dans ce cas les quantités P_H , Ψ et Φ .

L'étude expérimentale des variations de ces trois quantités en fonction de σ_{10} , de σ_{20} et Θ semble délicate. Nos conditions expérimentales qui étaient suffisantes pour une bille, n'ont pas permis de retrouver les résultats théoriques du chapitre III, et entre autre de déterminer les directions principales.

Nous attribuons ces résultats principalement au polissage imparfait de l'éprouvette. Pour que l'emploi d'un pénétrateur elliptique soit intéressant, il semble donc nécessaire d'avoir des conditions expérimentales très soignées, notamment en ce qui concerne les états de surface.



VIII CONCLUSION

Au début du présent travail, nous nous étions proposés d'améliorer la méthode de dureté hertzienne, dans le but de pouvoir déterminer complètement le tenseur des contraintes superficielles d'une pièce. Nous pensons avoir mis en évidence plusieurs améliorations possibles par rapport aux méthodes antérieures, notamment :

- Dans la détermination de la dureté hertzienne en utilisant une mesure supplémentaire qui caractérise l'élasticité du système bille-pièce. Il est alors possible de trouver la valeur de cette dureté lorsque le module d'Young est inconnu, ou, lorsque les conditions de contact sont mal définies.

- Dans la détermination de la plus petite des contraintes principales superficielles avec une bille. Pour cela, il faut pousser la pénétration jusqu'au domaine plastique naissant. On peut alors donner une approche de la plus grande des contraintes principales si celle-ci est inconnue, et dans le cas où elle est connue, on trouve alors la plus petite.

- Par l'utilisation d'un pénétrateur elliptique pour déterminer les directions principales. Nous avons vérifié qu'il faut dans ce cas des appareils de mesure très sensibles, et des conditions expérimentales particulièrement soignées (surtout homogénéité et isotropie des pièces).

Pour obtenir ces résultats, nous avons été amenés à approfondir l'étude de l'enfoncement d'un pénétrateur dans une pièce. Nous avons étudié systématiquement l'influence des divers paramètres (charges résiduelles, état de surface, etc...). Il est alors apparu que l'application des formules de Hertz aux résultats expérimentaux devait se faire avec précaution, tout se passant comme si le rayon de courbure intervenant dans ces formules était sous estimé.

Enfin, ce travail nous a permis de mettre en évidence une relation importante sur le comportement, dans le domaine plastique, de certains aciers. Pour une bille principalement, et, quel que soit l'état de contraintes, nous avons montré que l'enfoncement résiduel pouvait être considéré comme une fonction linéaire de la charge au début de la déformation plastique. Cette propriété permet de compléter la méthode de dureté hertzienne afin de déterminer, de manière plus précise, le tenseur des contraintes superficielles d'une pièce.

B I B L I O G R A P H I E

- [0] HERTZ
Gesamte Werke - 1895
pages 174 à 196.
- [1] A.I. LUR'E
Three-dimensional problems of the theory of elasticity
Interscience Publishers - 1964.
- [2] L. LANDAU et E. LIFCHITZ
Théorie de l'élasticité
Editions MIR - 1967.
- [3] APPELL
Traité de Mécanique Rationnelle, Tome 3
Gauthier-Villars
- [4] P.A. BLAIN
- The effect of internal stresses on hardness sheet
Metal Industries - Janvier 1949.
- Influence of Residual stress on hardness
Metal Progress - janvier 1957.
- [5] J. POMEY, F. GOUTEL, L. ABEL
Détermination des contraintes résiduelles dans les pièces cimentées
Acte du colloque international de Mécanique - Poitiers 1950
Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air, n° 263
- [6] L. HAUSSEGUY et H. MARTINOD
Nouveau procédé non destructif pour la détermination des contraintes résiduelles
Recherche Aéronautique n° 37 - janvier-février 1954.

- [7] C. MORETTI
Analyse des contraintes résiduelles
GAMI n° 2 , mars-avril 1961.
- [8] R. LECLOUX
Mesure des contraintes résiduelles de rectification par variation
de la dureté hertzienne.
Mémoire présenté au Conservatoire National des Arts et Métiers
en 1964.
- [9] E. MORICE et F. CHARTIER
Méthode statistique
Imprimerie Nationale
- [10] S. TIMOSHENKO et J.N. GOODIER
Théorie de l'élasticité
Librairie polytechnique BERANGER - 1961.
- [11] J. COURBON
Cours de résistance des Matériaux , tome 1
DUNOD - 1955.

vu :

le Président de Thèse

vu :

le Directeur de Thèse

Vu et Approuvé

Permis d'imprimer
Nantes, le

Le Doyen de la Faculté des Sciences

